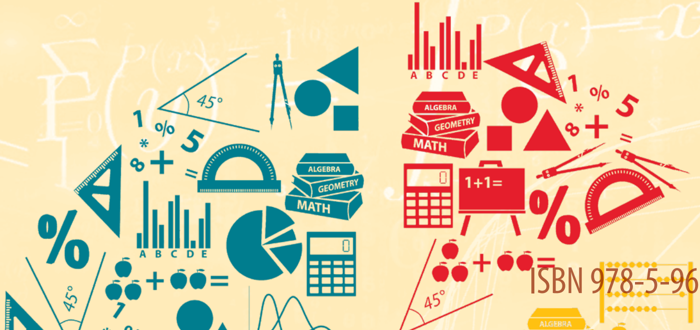
МАТЕМАТИКА И ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕМ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

МАТЕРИАЛЫ
XVI ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
Иркутск, 28–29 марта 2023 г.



ISBN 978-5-9624-2146-9

УДК 51(077)(063)
ББК 22.1р30л0

Рекомендовано к печати Учебно-методическим советом Педагогического института ИГУ

Под общей редакцией З. А. Дулатовой

Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XVI Всероссийской научно-практической конференции. Иркутск, 28–29 марта 2023 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ» ; под общ. ред. З. А. Дулатовой. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2023. – 1 электронный оптический диск (CD-ROM). – Заглавие с этикетки диска

ISBN 978-5-9624-2146-9

В материалах отражены вопросы особенностей отбора содержания и организации обучения математике в процессе реализации требований ФГОС в общем и профессиональном образовании, внедрения современных методов обучения, организации оценки результатов обучения в современных условиях, подготовки учащихся к прохождению итоговых государственных испытаний.

Предназначено для учителей и преподавателей математики, студентов математических профилей вузов.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Иркутский государственный университет»
664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1; тел. +7(3952) 52-19-00
Издательство ИГУ, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124
тел. +7(3952)52-18-53; e-mail: izdat@law.isu.ru
Подписано к использованию 03.05.2023. Тираж 15 экз. Объем 8,82 Мб.

Тип компьютера, процессор, частота:	32-разрядный процессор, 1 ГГц или выше
Оперативная память (RAM):	256 МБ
Необходимо на винчестере:	320 МБ
Операционные системы:	ОС Microsoft® Windows® XP, 7, 8 или 8.1. ОС Mac OS X
Видеосистема:	Разрешение экрана 1024x768
Акустическая система:	Не требуется
Дополнительное оборудование:	Не требуется
Дополнительные программные средства:	Adobe Reader 6 или выше

МАТЕМАТИКА И ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕМ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

МАТЕРИАЛЫ
XVI ВСЕРОССИЙСКОЙ
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ

Иркутск, 28–29 марта 2023 г.

ISBN 978-5-9624-2146-9

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Иркутский государственный университет»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА И ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕМ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

МАТЕРИАЛЫ
XVI ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
Иркутск, 28–29 марта 2023 г.

ISBN 978-5-9624-2146-9

СОДЕРЖАНИЕ

Е. С. Абрамов
МБОУ г. Иркутска «Лицей № 2»
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИССЕКТРИС

В школьном курсе геометрии одними из базовых понятий являются понятия «угол» и «биссектриса угла» (она же – ось симметрии угла). Как известно, три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Стоит заметить, что этот факт далеко не всегда находит отражение в решении задач на обычных уроках математики в школе. Однако, если мы рассмотрим более сложные задачи, особенно олимпиадного характера, то заметим, что конфигурации с точкой пересечения биссектрис встречаются довольно часто.

С другой стороны, обычно в задачах делается уклон на биссектрису как на «делитель» угла пополам, т. е. объект связывают прежде всего с углами, хотя, если вспомнить, даже доказательство пересечения биссектрис проводится с использованием термина «расстояние».

В данной статье речь пойдёт о биссектрисе как геометрическом месте точек. На конкретных примерах будут проиллюстрированы возможности реализации другого подхода к определению биссектрисы – через расстояние от точки до прямой, а также подробно описана вся теоретическая составляющая, которая, на наш взгляд, необходима для успешного освоения описанного ниже материала.

Ещё в 7-м классе на уроках геометрии формулируется следующая теорема, которая служит толкованию биссектрисы с точки зрения расстояния. Мы данную теорему возьмём без доказательства, так как его можно найти в любом учебнике геометрии базового уровня.

***Биссектриса угла** – это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.*

Благодаря такому подходу к определению биссектрисы угла можно доказать ряд важных фактов, относительно биссектрис.

***Теорема 1.** Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Рассмотрим в треугольнике ABC точку пересечения биссектрис I углов A и C. Тогда, пользуясь определением биссектрисы как ГМТ, получаем, что точка I равноудалена от сторон AC и AB, т. е. $IC_1 = IB_1$ (B_1 и C_1 – основания перпендикуляров из I на стороны AC и AB).

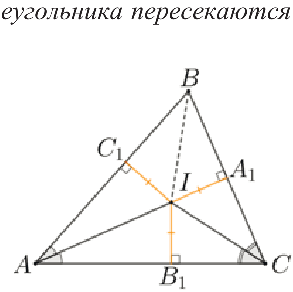


Рис. 1

Аналогично точка I равноудалена от сторон AC и BC, т. е. $IB_1 = IA_1$ (A_1 – основание перпендикуляра из I на сторону BC).

Так как $IA_1 = IB_1 = IC_1$ мы получаем, что точка I равноудалена от всех трёх сторон треугольника $ABC \Rightarrow BI$ – биссектриса угла B. Таким образом, все три биссектрисы проходят через одну точку – *инцентр* треугольника.

Теорема 2. *Биссектрисы двух внешних углов треугольника и третьего внутреннего, не смежного с ними, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть точка I_A – точка пересечения двух биссектрис AI_A и CI_A внешних углов CAC_1 и ACA_1 соответственно треугольника ABC. В силу того, что точка I_A лежит на биссектрисе угла CAC_1, она равноудалена от прямых AB и AC. Аналогично с биссектрисой угла ACA_1 и прямыми BC и AC. Следовательно, точка I_A равноудалена от сторон угла ABC, а значит она лежит на биссектрисе этого угла.

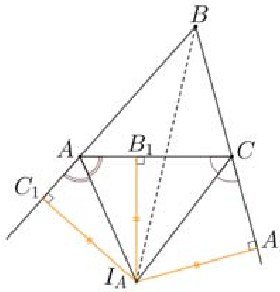


Рис. 2

Последний важный факт, связанный с величиной угла между биссектрисами, нередко всплывает в различных задачах и его полезно держать в уме.

Пусть дан треугольник ABC, I – центр вписанной окружности, I_A – центр вневписанной окружности со стороны BC. Тогда верны следующие формулы:

$$\boxed{\angle AIC = 90^o + \frac{\angle B}{2};\ \angle AI_AC = 90^o - \frac{\angle B}{2}.}$$

Примем без доказательства, так как они легко следуют их простого счёта углов.

Далее продемонстрируем на конкретных примерах задач способы реализации всего вышеприведённого теоретического инструментария. Многие из задач взяты с различных олимпиад и конкурсов для обучающихся 7–8-го класса, а какие-то являются просто математическим фольклором. Также отметим, что хорошая подборка задач на данную тему присутствует в учебнике по геометрии для углубленного уровня 7-го класса под редакцией А. Г. Мерзляка, а также в задачнике М. А. Волчкевича «Уроки геометрии в задачах, 7–8 классы».

Основная идея на все задачи: если в некоторой точке пересеклись две биссектрисы одного треугольника, то в эту же точку приходит третья биссектриса: либо внутреннего угла, либо внешнего угла.

Начнём с простых задач, которые обязательно должны быть в серии для иллюстрации особенности применения теории при решении задач.

Задача 1. *В четырехугольнике ABCD тупые углы B и C равны. Биссектриса угла D пересекает серединный перпендикуляр к стороне BC в точке O. Докажите, что AO – биссектриса угла A этого четырёхугольника.*

Решение. Сделаем дополнительное построение – продлим стороны AB и DC до пересечения в точке E (идея следует из того, что есть два равных тупых угла). Так как смежные к равным углам тоже равны $\Rightarrow$ треугольник BEC – равнобедренный. Тогда серединный перпендикуляр к отрезку BC проходит через точку E и является биссектрисой угла AED. Таким образом, в треугольнике AED точка O – точка пересечения биссектрис углов D и E, значит она является инцентром этого треугольника $\Rightarrow$ AO – биссектриса угла A.

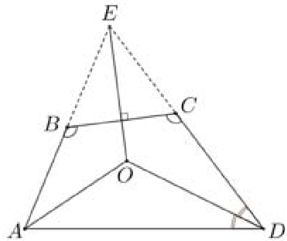


Рис. 3

Задача 2. *В выпуклом шестиугольнике ABCDEF, все углы которого тупые, равны попарно углы A и B, C и D, E и F. Докажите, что серединные перпендикуляры отрезков AB, CD, EF пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Как и в предыдущей задаче сделаем дополнительное построение – продлим стороны шестиугольника до пересечения как показано на *рис. 4*. Заметим, что в треугольнике XYZ данные серединные перпендикуляры являются биссектрисами его углов $\Rightarrow$ они пересекаются в одной точке – инцентре треугольника XYZ.

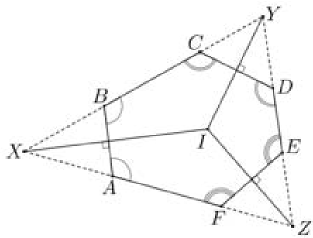


Рис. 4

Следующая задача относится к числу тех, в которых «ничего нет, а нужно что-то найти». С другой стороны, это хороший пример для случая, когда школьники впервые начинают работать с биссектрисами внешних углов.

Задача 3. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.*

Решение. Рассмотрим треугольник ADB: в нём BE – биссектриса внутреннего угла B, DE – биссектриса внешнего угла D, и две эти биссектрисы пересекаются в точке E $\Rightarrow$ *в эту точку приходит биссектриса внешнего угла A*. С другой стороны, это означает, что равны углы *2* и *3*, а также равны углы *1* и *2* (т. к. AD – биссектриса угла CAB) $\Rightarrow$ все три угла равны по 60° $\Rightarrow$ искомый угол равен 120°.

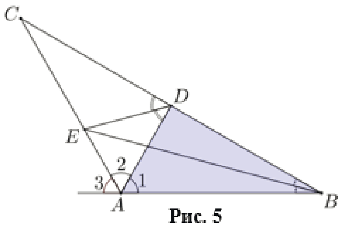


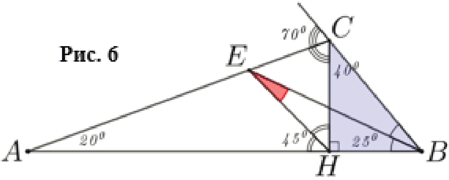
Рис. 5

Далее необходимо рассмотреть несколько классических несложных задач на счёт углов, где довольно хорошо демонстрирует себя данная тема. Фактически на данном этапе происходит отработка темы.

Задача 4. *В треугольнике ABC известно, что угол A равен 20°, угол B равен 50°. CH – высота, HE – биссектриса треугольника AHC. Найдите угол BEH.*

Решение. Заметим, что угол *BHC* равен *40°*, а внешний угол *C* равен *70°*. Тогда угол *ACH* также равен *70°*. Заметим, что точка *E* – точка пересечения биссектрис внешних углов треугольника *CHB* $\Rightarrow$ в эту точку приходит биссектриса внутреннего угла *B* $\Rightarrow$ *BE* – биссектриса угла *ABC*. Далее из счёта углов находим, что искомый гол *BEH* равен *20°*.

Рис. 6



После решения задачи стоит отметить, что довольно часто при решении задач удобно использовать именно внешние углы треугольника: *внешний угол равен сумме двух не смежных с ним* – простая теорема начала 7-го класса иногда позволяет заметно упростить процесс решения и описания решения задачи. Кроме того, в данной теме довольно часто стоит обращать внимание на внешние углы треугольника, так как это один из главных её «участников».

Другой распространённый сюжет – это наличие квадрата в основе конфигурации. Дело в том, что тогда на чертеже всегда присутствует «скрытая» биссектриса – диагональ квадрата.

Задача 5. *На продолжении лучей DC и AD квадрата ABCD выбраны такие точки E и F соответственно, что угол FED равен 40° и угол FBA равен 65°. Найдите угол BEC.*

Решение. В треугольнике *FDE* угол *E* равен *40°* $\Rightarrow$ угол *DFE* равен *50°*. Кроме того, из прямоугольного треугольника *BAF* заключаем, что угол AFB равен *25°* $\Rightarrow$ *BFE* также равен *25°* и *FB* – биссектриса угла *F* треугольника *DFE*.

Далее проведём диагональ *DB* квадрата *ABCD*, которая, по свойству квадрата, является биссектрисой угла *ADC* – внешнего угла треугольника *DFE*. Таким образом, точка *B* – точка пересечения внутренней и одной внешней биссектрис треугольника *DFE* $\Rightarrow$ *BE* – биссектриса внешнего угла *E* треугольника *DFE*. Далее из элементарного счёта углов получаем, что искомый угол *BEC* равен *70°*.

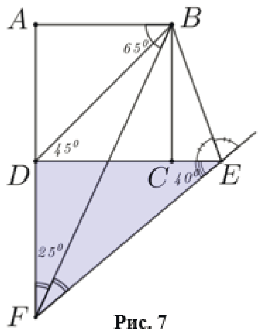


Рис. 7

Задача 6. *На сторонах AD и CD квадрата ABCD выбраны точки Q и P соответственно так, что углы ABQ и PQD равны 15° и 30°. Найдите угол QBP.*

Решение. Из счёта углов следует, что угол *AQB* равен *75°*, а так как угол *PQD* равен *30°* ⇒ угол *BQP* также равен *75°*. Таким образом, *QB* – биссектриса внешнего угла треугольника PDQ. Вторую биссектрису этого треугольника можно обнаружить, если провести диагональ квадрата – отрезок *DB*. Следовательно, точка *B* – точка пересечения внутренней и внешней биссектрис углов треугольника *PDQ* ⇒ *PB* также является биссектрисой внешнего угла *P* этого треугольника.

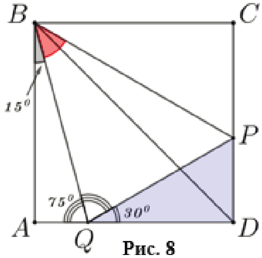


Рис. 8

Искомый угол, таким образом, – это угол между биссектрисами внешних углов треугольника, который можно посчитать по формуле:

$$\angle QBP = 90^o - \frac{\angle D}{2}.$$

Так как угол *D* – прямой, то угол *QBP* равен *45°*.

Вообще надо сказать, что таких сюжетов с квадратом довольно много. Часть из которых мы поместили в задачи для самостоятельного решения. В качестве ещё одного примера рассмотрим следующую известную задачу.

Задача 7. *В квадрате ABCD на сторонах BC и CD отмечены точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45°. Докажите, что BM + ND = MN.*

Доказательство. Заметим, что точка *A* лежит на внутренней биссектрисе угла *C* треугольника *MCN* и, кроме того, угол *MAN* «правильный»: он удовлетворяет формуле угла между биссектрисами внешних углов треугольника A_1 лежащих на одной биссектрисе такое невозможно (в целом угол *MAN* принимает своё конкретное значение только один раз: точка движется вниз от вершины – угол уменьшается, а если приближается к вершине, то такой угол увеличивается). Значит точка *A* равноудалена от *MC*, *NC* и *MN*.

Опустим перпендикуляр *AH* на отрезок *MN*. Из доказанного выше следует, что *AB* = *AH* = *AD*, а *MA* и *NA* – биссектрисы внешних углов треугольника *MCN*. Тогда прямоугольные треугольники *ABM* и *AHM*, а также *ADN* и *AHN* равны по острому углу и гипотенузе ⇒ *BM* = *MH* и *DN* = *NH* ⇒ *BM* + *DN* = *MN*.

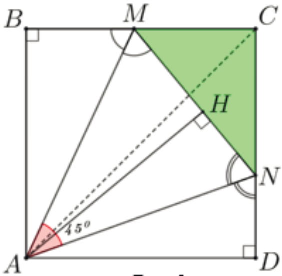


Рис. 9

В конце рассмотрим очень известную задачу, автором которой, как указано во многих сборниках, является Игорь Фёдорович Шарыгин.

Задача 8. *В треугольнике ABC угол B равен 120°. Пусть AD, BE, CF – биссектрисы углов этого треугольника. Найдите угол DEF.*

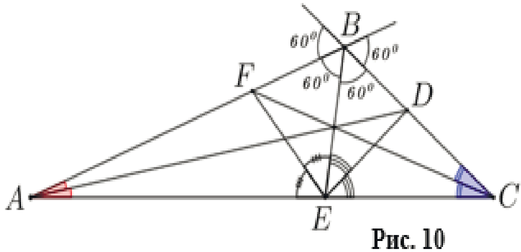


Рис. 10

Решение. Заметим, что биссектриса угла *B* делит его на два угла по *60°*. Кроме того ясно, что внешний угол при вершине *B* равен *60°*. Тогда можно заметить «скрытые» биссектрисы в этой конфигурации.

Рассмотрим треугольник *ABE*: в нём проведена биссектриса внутреннего угла *A*, а также обнаружилась биссектриса внешнего угла *B*. Обе эти биссектрисы пересекаются в точке *D* ⇒ *EB* – биссектриса внешнего угла *E* этого треугольника. Аналогично из треугольника *CBE* заключаем, что *EF* – биссектриса внешнего угла *E* этого треугольника.

Осталось заметить, что *EF* и *ED* – биссектрисы смежных углов, а значит перпендикулярны ⇒ угол *DEF* равен *90°*.

В конце мы предлагаем подборку к уже имеющимся задачам для более качественного усвоения темы, а также для работы на занятиях с обучающимися.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC известно, что угол A равен 28°, а угол C равен 14°. На стороне AC выбрана точка D такая, что угол CBD равен 42°. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E. Найдите угол DEB.

2. Дан четырёхугольник, в котором углы ABD и DBC равны 60°, угол ADB равен 50°, а угол BDC – 80°. Найдите угол между его диагоналями.

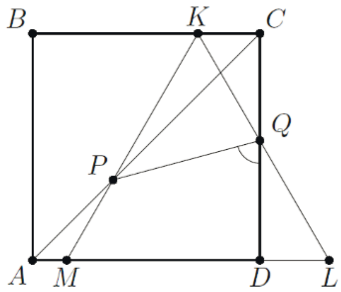
3. На сторонах BC и CD квадрата ABCD отмечены точки M и K соответственно, причём углы BAM и CKM равны 30°. Найдите угол AKD.

4. В трапеции ABCD боковая сторона AB равна меньшему основанию BC, а диагональ AC равна основанию AD. Прямая, проходящая через вершину B параллельно AC, пересекает прямую CD в точке M. Докажите, что AM – биссектриса угла BAC.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL. На отрезке BK отмечена точка N так, что LN || AC. Оказалось, что NK = LN. Найдите величину угла ABC.

6. В треугольнике ABC с острым углом при вершине A проведены биссектриса AE и высота BH. Известно, что угол AEB равен 45°. Найдите угол EHC.

7. На сторонах BC и CD квадрата ABCD отметили соответственно точки M и N так, что угол MNC в два раза больше угла NAD. Найдите угол MAN.



8. Квадрат ABCD и равносторонний треугольник MKL расположены так, как это показано на рисунке. Найдите угол PQD.

9. В четырёхугольнике ABCD биссектрисы углов A и B пересекаются в точке P, а биссектрисы углов C и D – в точке Q. Прямая PQ пересекает сторону AB в точке R. Найдите угол PRB, если известно, что углы A, B, C и D соответственно равны 60°, 160°, 90°, 50°.

10. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30°. Какой угол образует с этой стороной проведённая к ней медиана?

11. Точка E на стороне AD квадрата ABCD такова, что угол AEB равен 60°. Биссектриса угла ABE, отразившись от стороны AD, пересекает отрезок BE в точке F. Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.

12 (ММО, 2015). В остроугольном треугольнике ABC с углом A в 45°, проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Биссектриса угла BAA_1 пересекает прямую B_1A_1 в точке D, а биссектриса угла CAA_1 пересекает прямую C_1A_1 в точке E. Найдите угол между прямыми BD и CE.

P.S. Также автор статьи пользовался материалами математических смен образовательного центра «Сириус», и материалами математических олимпиад. Большая часть задач – математический фольклор, авторство и первоисточник которых установить довольно сложно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мерзляк А. Г., Поляков В. М. Геометрия. 7 класс : учебник : углубленный уровень / под ред. В. Е. Подольского. 5-е изд., стер. М. : Просвещение, 2022. 208 с. : ил.

2. Волчкевич М. А. Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы. 3-е изд., стер. М. : МЦНМО, 2019. 208 с.

3. Курс «Дополнительные главы геометрии, 8 класс» / Модуль «Пересечение биссектрис и высот» // Сириус. Курсы – Открытая онлайн-школа развития таланта. URL: https://edu.sirius.online/

В. Н. Агейчик

МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, г. Иркутск

А. Г. Зенцов

Лицей № 36 ОАО «РЖД», г. Иркутск

ВЫРОЖДЕННЫЕ ФИГУРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В математических исследованиях часто встречаются **вырожденные** преобразования, распределения, **вырожденные** уравнения, системы уравнений, **вырожденные** фигуры. При этом **вырожденный** случай представляется как предельный в исследуемом классе объектов, имеющий качественные отличия от остальной части класса. Например**, вырожденные** кривые второго порядка – это прямые и точки, которые задаются уравнением второй степени.

В школьной математике **вырожденные случаи** имеют место при решении задач с параметрами. Рассмотрим пример такой задачи:

при каких значениях параметра a корни уравнения $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше 0,5?

Решение. Рассмотрим **вырожденный** случай при $a = 2$ (при этом уравнение становится линейным). Тогда $x = 2/3$, поэтому $a = 2$ подходит. Пусть $a \neq 2$. Тогда уравнение – квадратное. Данное расположение корней квадратного трёхчлена задается следующей системой: $\begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 > 0{,}5, \\ (2 - a)f(0{,}5) > 0. \end{cases}$

Получаем $a \in [16/17; 2)$, с учётом вырожденного случая $a \in [16/17; 2]$.

Кроме случая вырождения уравнения из квадратного в линейное в задачах с параметрами рассматривается вырождение пересечения параболы и прямой до касания, а вместо применения производной можно рассмотреть квадратное уравнение с вырожденным дискриминантом (равным 0). Пример:

При каких значениях параметра a система уравнений имеет ровно три различных решения?

$$\begin{cases} y^2 + 2(x - 2)y + (x^2 - 4)(2x - x^2) = 0, \\ y = a(x - 4). \end{cases}$$

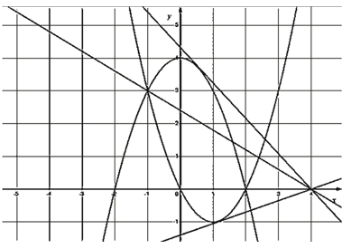


Рис. 1

Решение. Решим первое уравнение относительно y. Получаем $y = x^2 - 2x$ и $y = 4 - x^2$. График уравнения – объединение двух парабол. Второй график – прямая, проходящая через точку (4; 0). Очевидные значения $a = -0{,}6$ и $a = 0$. При них прямая проходит через точку пересечения парабол и получается 3 решения.

Рассмотрим вырожденные случаи пересечения параболы и прямой – касание. Используем то, что соответствующее уравнение имеет единственный корень, т. е. $D = 0$. Получаем $x^2 - (a + 2)x + 4a = 0$, откуда $a^2 - 12a + 4 = 0$ и $a = 6 \pm 4\sqrt{2}$. Для второй параболы получаем $x^2 + ax - 4a - 4 = 0$, откуда $a^2 + 16a + 16 = 0$ и $a = -8 \pm 4\sqrt{3}$.

В школьной геометрии изучение вырожденных фигур основными программами не предусматривается. В данной статье мы задались целью показать примеры вырожденных геометрических фигур и их применение при доказательствах и при решении различных задач. Важно заметить, что **вырожденный** случай объединяет интересные, поучительные геометрические задачи в целостный набор, значимый с различных точек зрения в образовательном поле.

Начнем с вырожденной ломаной. Это ломаная, у которой хотя бы два звена расположены на одной прямой (рис. 2) На этом рисунке ломаная получена из ломаной на рис. 3 спрямлением двух звеньев. Длина вырожденной ломаной меньше длины исходной ломаной. Такое сравнение применяется при решении экстремальных задач.

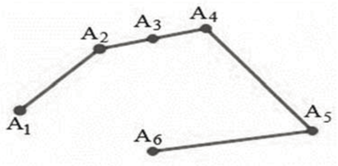


Рис. 2

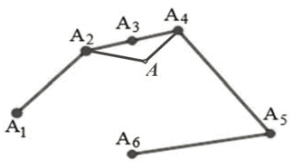


Рис. 3

Например, *дан угол и точка C внутри него. Постройте точки A и B на сторонах угла так, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.*

Точки P и Q симметричны относительно сторон угла (рис. 4). $PA = AC$, $BQ = BC$, $PA_1 = A_1C, CB_1 = B_1Q$. Длина вырожденной ломаной $PABQ$ меньше длины PA_1B_1Q, следовательно точки A и B – искомые.

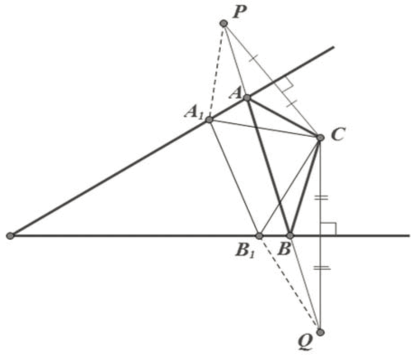


Рис. 4

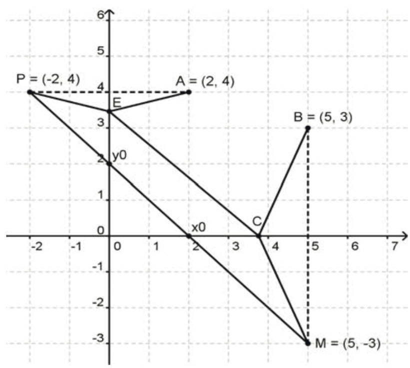


Рис. 5

Рассмотрим следующую задачу: *найдите наименьшее значение выражения*

$$\sqrt{(x-5)^2+9}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{4+(y-4)^2}.$$

Решение. Пусть $A(2; 4)$, $B(5; 3)$, $C(x, 0)$, $E(0, y)$ (рис. 5). Первый корень – длина отрезка BC, второй корень – длина CE, третий – длина AE. Точка $P(–2; 4)$ симметрична A относительно OY, точка $M(5; –3)$ симметрична B относительно OX. Длина ломаной $AECB$ равна длине $PECM$, так как $EA = EP$ и $CB = CM$. Ломаная $PECM$ имеет наименьшую длину (рис. 6), если точки E и C расположены на отрезке PM, равном $7\sqrt{2}$ (PE_0C_0M – вырожденная ломаная).

Следующая фигура – **вырожденный** треугольник, определяемый как треугольник, три вершины которого совпадают или лежат на одной прямой (рис. 7).

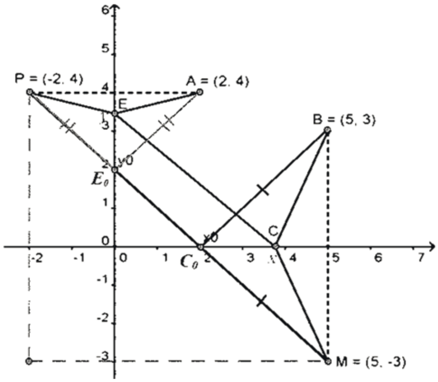


Рис. 6

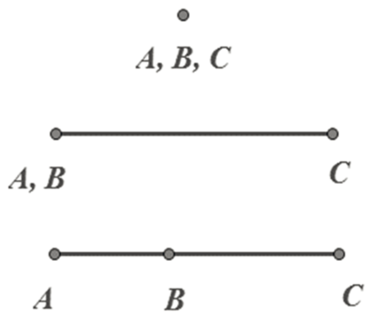


Рис. 7

Рассмотрим две задачи с параметром, в решениях которых применяется вырожденный треугольник.

1. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} 3x+4y=26, \\ \sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}+\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=10 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}=10.$$

Первый корень – расстояние между точками $C(x;\ y)$ и $A(2; –1)$ (рис. 8). Второй корень – расстояние между точками $C(x; y)$ и $B(10; 5)$. Так как $AB = 10$ и сумма $AC + CB = 10$, то точка C расположена на отрезке AB (**вырожденный** треугольник) и является точкой пересечения прямых AB и a, заданных уравнениями $3x – 4y = 10$ и $3x + 4y = 26$ соответственно. Ответ: (6; 2).

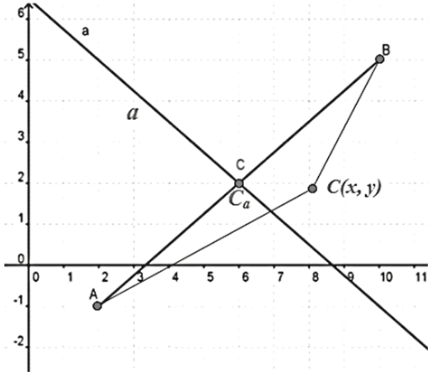


Рис. 8

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \geq 2\sqrt{5}, \\ \sqrt{x^2+(y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2} \leq 2\sqrt{13}. \end{cases}$$

Решение. Во втором неравенстве первый корень – расстояние между $C(x; y)$ и $B(0; 8)$ (*рис*. 9). Второй корень – расстояние между $C(x; y)$ и $A(6; 4)$.

$AB = 2\sqrt{13}$ и $CB + CA \leq 2\sqrt{13}$, следовательно, точка C расположена на отрезке AB (**вырожденный** треугольник). В первом неравенстве $\sqrt{x^2+y^2} = CO$, второй корень – расстояние между C и $D(2; 4)$. $CO \geq CD + 2\sqrt{5}$. Так как $OD = 2\sqrt{5}$ и $CO \geq CD + OD$, то C расположена на прямой OD (**вырожденный** треугольник) и является точкой пересечения прямых OD и AB, заданных уравнениями $y = 2x$ и $2x + 3y – 24 = 0$ соответственно. Ответ: (3; 6).

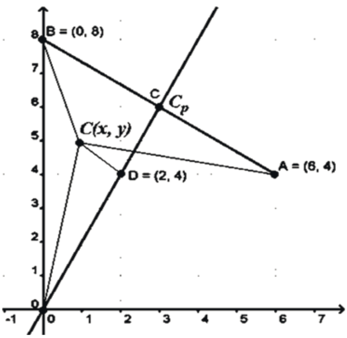


Рис. 9

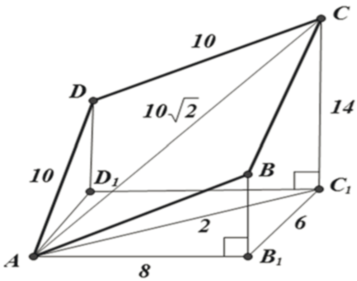


Рис. 10

Рассмотрим интересную стереометрическую задачу:

Расстояния от вершин B, C, D квадрата ABCD со стороной 10 до плоскости α, проходящей через вершину A, равны 6, 14 и 8 соответственно. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью квадрата.

Решение. Параллелограмм $AB_1C_1D_1$ – проекция квадрата на плоскость α (*рис.* 10). Применив теорему Пифагора в треугольниках ABB_1, ACC_1 и ADD_1, найдём стороны параллелограмма: $AB_1 = 8$, $AD_1 = 6$, $AC_1 = 2$. Равенство $AC_1 + B_1C_1 = AB_1$ показывает, что треугольник AB_1C_1 – **вырожденный**. Следовательно, проекция квадрата – отрезок, тогда угол между плоскостями равен 90°.

Покажем, как с помощью вырожденного треугольника можно доказать следующее утверждение: *основания перпендикуляров, опущенных из точки P описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой (прямая Симсона).*

Сначала рассмотрим подерный треугольник (*рис.* 11) *NFQ* (*подéрный или педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC – это треугольник, вершинами которого являются основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника ABC или их продолжения).*

Одну из сторон подерного треугольника точки *P* относительно треугольника *ABC* (на *рис.* сторона *NF*) можно вычислить по формуле $AP \cdot BC/(2R)$, где R – радиус описанной окружности *ABC*.

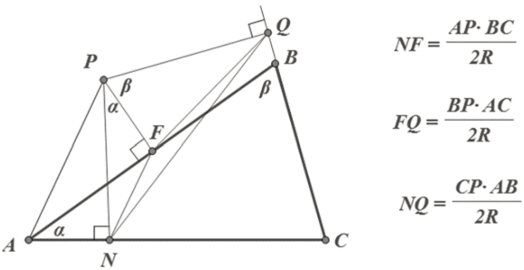


Рис. 11

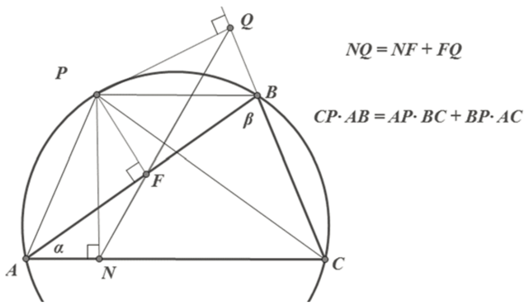


Рис. 12

Если рассмотреть вырожденный подерный треугольник *NQ* (рис. 12), то из равенства $CP \cdot AB = AP \cdot BC + BP \cdot AC$ следует, что *APBC* – вписанный четырехугольник (теорема Птолемея) и точка *P* лежит на описанной окружности *ABC*. Точки *N*, *F*, *Q* лежат на прямой Симсона.

Очередная фигура – **вырожденная** окружность, которая представляется как точка (окружность с радиусом 0).

Сначала рассмотрим задачу с параметром, при решении которой применяется **вырожденная** окружность.

Найдите все такие значения a*, при каждом из которых система имеет ровно одно решение*

$$\begin{cases} x^2 \leq 2 - x, \\ 8x^2 + 8y^2 = 16ax - 16ay + 48y - 15a^2 + 50a - 72. \end{cases}$$

Решение. Неравенство системы задаёт полосу $-2 \leq x \leq 1$. Уравнение задаёт окружность с центром (a; 3 – a) и радиусом $R = \sqrt{(a^2 + 2a)/8}$. Одно решение получается, когда окружность касается полосы с внешней стороны (рис. 13). При касании прямой $x = 1$ получаем $a = 2$, (второе значение даёт касание изнутри). При касании прямой $x = -2$ получаем значения $a = -16/7$ и $a = -2$ (рис. 14). Последнее значение даёт **вырожденную** окружность, т. е. точку (–2; 5). Возникает предположение, что могут быть ещё точки внутри полосы. И действительно, рассматривая окружность с нулевым радиусом, получаем ещё одно решение при $a = 0$, при этом (0; 3) – **вырожденная** окружность.

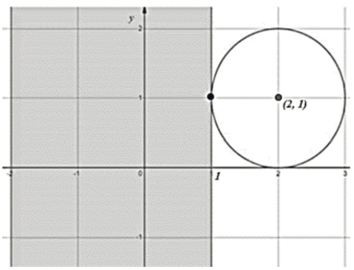


Рис. 13

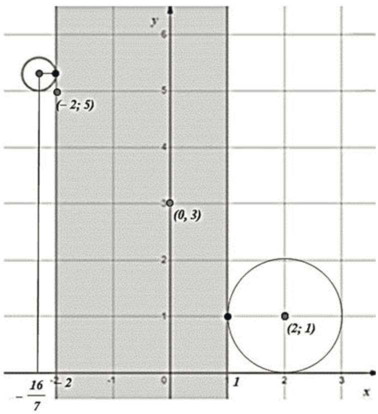


Рис. 14

Вырожденная окружность находит применение при решении достаточно сложных геометрических задач. В качестве примера рассмотрим решение такой задачи: *прямая, проходящая через инцентр I треугольника ABC перпендикулярно прямой BI, пересекает прямую AC в точке* B_1*. Аналогично определяются точки* A_1 *и* C_1*. Докажите, что все три точки лежат на одной прямой.*

Решение. *BP* – биссектриса. Применив лемму о трезубце, рассмотрим окружность ω с центром в точке *P* (рис. 15). Кроме описанной окружности треугольника *ABC* и окружности ω рассмотрим третью окружность с центром в точке *I* и нулевым радиусом, т. е. **вырожденную** окружность. Из равенств а $BI^2 = B_1C \cdot B_1A$ следует, что точка B_1 имеет равные степени относительно всех трех окружностей, в частности относительно описанной окружности и вырожденной в точке I.

Реализуя такой же способ, докажем, что точки A_1 и C_1имеют равные степени относительно описанной окружности треугольника ABC и вырожденной окружности I. Таким образом, все три точки лежат на радикальной оси описанной и вырожденной окружностей.

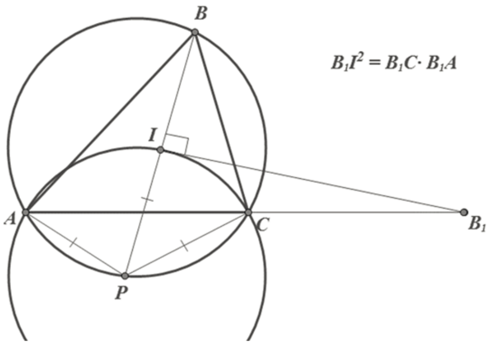


Рис. 15

Приведем еще примеры вырожденных фигур:

Отрезок прямой – это **вырожденный** случай прямоугольника, сторона которого имеет длину 0. Точка – **вырожденный** квадрат.

Выпуклый многоугольник является **вырожденным**, если две последовательные стороны совпадают хотя бы частично, или хотя бы одна сторона имеет нулевую длину, или хотя бы один угол равен 180°. **Вырожденный** выпуклый многоугольник с n сторонами выглядит как многоугольник с меньшим количеством сторон.

Например, на рис. 16 вписанный треугольник с вершинами 1, 2, 3 рассматривается как **вырожденный** шестиугольник, а в точках 4, 5, 6 пересекаются продолжения сторон треугольника с касательными в вершинах **вырожденного** шестиугольника. Точки пересечения лежат на одной прямой, что является **вырожденным** случаем теоремы Паскаля (е*сли шестиугольник вписан в окружность или в любое другое коническое сечение или даже в пару прямых, то точки пересечения трёх пар противоположных сторон лежат на одной прямой.)*

Выпуклый многогранник является **вырожденным**, если либо две его смежные грани компланарны, либо два ребра выровнены. В случае тетраэдра это эквивалентно утверждению, что все его вершины лежат в одной плоскости. **Вырожденный** тетраэдр имеет нулевой объём.

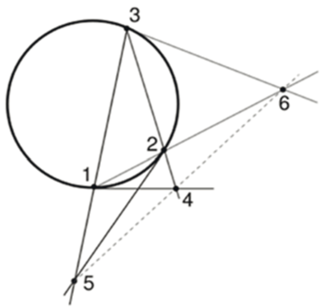


Рис. 16

В заключение подчеркнем, что **вырожденные** фигуры вводятся в рассмотрение при **исследовательском** подходе к геометрическим объектам, к решению геометрических задач, и задач с геометрической интерпретацией, включая задачи с параметрами. Соответствующие наборы задач, при решении которых требуется исследовательский подход, не только должны иметь место в обучении, они должны занимать значительную долю в задачном материале.

Решения таких задач способствуют более глубокому пониманию геометрии, способствуют совершенствованию исследовательских навыков, повышают интерес к математике в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М. : МЦНМО, 2007. 136 с.

2. Бояркина Г. П., Пащенко Г. Я. Задачи с параметрами : учеб. пособие. Иркутск : ИрИИТ, 2000. 146 с.

3. Сдам ГИА. Тип 17 № 509631. URL: https://math-ege.sdamgia.ru (дата обращения: 13.03.2023).

И. Н. Аникеева
МБОУ г. Иркутска СОШ № 66
Е. С. Выборова
МБОУ г. Иркутска СОШ № 39

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: ЗА СТРАНИЦАМИ УЧЕБНИКА МАТЕМАТИКИ

Содержание образования обновляется в связи с требованием времени и с 1 сентября 2022 г. в силу вступили обновленные федеральные государственные образовательные стандарты (ФГОС 3.0).

Изменился учебный план ООО, фрагмент которого представлен ниже.

Учебный план ООО

Предметные области	Классы	5 класс	6 класс	7 класс	8 класс	9 класс	Итого
	Учебные предметы, курсы	22-23 уч.г.	23-24 уч.г	24-25 уч.г.	25-26 уч.г.	26-27 уч.г.	
Обязательная часть							
Русский язык и литература	Русский язык	5	6	4	3	3	714
	Литература	3	3	2	2	3	442
Иностранный язык	Иностранный язык	3	3	3	3	3	510
Математика и информатика	Математика	5	5				340
	Алгебра			3	3	3	306
	Геометрия			2	2	2	204
	Вероятность и статистика			1	1	1	102
	Информатика			1	1	1	102

Рис. 1

Учебный предмет «Вероятность и статистика» введен с 7-го класса как отдельный предмет в обязательной части учебного плана в объеме 102 часов за три года.

Но уже на протяжение 10-летия государственная итоговая аттестация (ГИА) проверяет усвоение материала по данной теме, которая была включена в один из разделов алгебры с 7-го по 11-й класс. А с 2022 г. на уровне ЕГЭ по профильной математике было добавлено еще одно задание по теории вероятности, задание повышенного уровня сложности, требующего от выпускников умения решать данные задачи с помощью формул вероятности, которые в недостаточной степени рассматривались и теорией, и практикой в учебных пособиях. И анализирую результаты ЕГЭ 2022 г., с этим заданием справились менее 70 % учащихся (учитывая все типы образовательных организаций), по сравнению с заданием на классическое определение вероятности – более 90 % выпускников 11-х классов.

В сентябре – октябре мы провели опрос среди учащихся 11-х классов, задав им три вопроса по умению решать задачи по теории вероятности и получили следующие результаты:

Таблица 1

	Задачи на классическое определение вероятности (задание 2)	Задачи на применение теорем и вероятности событий и математического ожидания (задание 3)
Понимаю, решаю уверенно	68 %	3 %
Испытываю затруднение при решение данных задач	21 %	38 %
Не понимаю, не решаю эти задачи	11 %	59 %

И на основе проведенного опроса среди педагогов г. Иркутска данная тема также актуальна среди учителей, работающих с учащимися 11-х классов.

Можно сделать однозначный вывод, что на сегодняшний день, у учащихся нет системного понимания как читать, как интерпретировать и как решать задачи по теории вероятности. И так как задачи на классическое определение вероятности учащимися воспринимаются и решаются лучше, определили для себя следующий выход из данной, «практически тупиковой», ситуации: подобрать некоторые приемы решения задач № 4 с применением классического определения вероятности.

Разберем некоторые понятия, формулы, таблицы и т. п. для дальнейшего использования при решении задач:

1. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний k из n элементов называют любую группу, состоящую из k элементов. *Например*: при подбрасывании монеты пять раз найти сколько раз выпало ровно два орла. Решение: $k = 2$, $n = 5$, найдем число сочетаний 2 элемента из 5: $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$. Ответ: 2 орла выпало 10 раз.

2. $P(A) = n/m$ – классическое определение вероятности, где n – благоприятные для события А исходы, а m – общее количество исходов в некотором испытании.

3. Общее количество исходов в некотором испытании можно найти с помощью формулы для двухсторонней монеты («орёл», «решка»): $m = 2^k$, где k – количество монет или количество подбрасываний одной монеты, а m – количество различных сочетаний «орлов» и «решек» в этом испытании.

4. Прием построения таблиц истинности для логического выражения с целью перебора различных вариантов при подбрасывании монеты.

Например: монету подбросили три раза, $k = 3$, $m = 2^3 = 8$ различных сочетаний «орла» и «решки». Строим таблицу из трех граф и девяти строк. Верхняя строка – заголовок, в первой графе (8 : 2 = 4) пишем по четыре «орла» и «решки», во торой графе (4 : 2 = 2) – по два «орла» и «решки», а в третьей (2 : 2 = 1) – по одному «орлу» и одной «решке».

1 раз	2 раз	3 раз
О	О	О
О	О	Р
О	Р	О
О	Р	Р
Р	О	О
Р	О	Р
Р	Р	О
Р	Р	Р

Получили восемь различных переборов. Аналогичным образом можно рассмотреть все переборы и при четырех монетах или четырех подбрасываниях одной монеты.

5. Таблица сумм чисел от 1 до 6 для работы с кубиками.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

6. Решение задач на теорию вероятностей с помощью уравнений.

7. Формула Бернулли $C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, где $C_n^k -$ число сочетаний, p – вероятность удачи в некотором испытании, а $(1-p)$ – вероятность неудачи в этом же испытании. k – количество элементов чего-либо в испытании, а n – количество групп, состоящую из k элементов в n.

Рассмотрим несколько задач на применение вышеперечисленных приемов, формул, таблиц и понятий.

Задача 1. Симметричную монету подбросили пять раз. Известно, что «решка» выпала ровно два раза. Какова вероятность, что первых трех подбрасываниях монеты выпал «орёл»?

***Решение*:** 1) найдем количество сочетаний «орлов» и «решек» при условии, что «решка» выпала ровно два раза, воспользуемся числом сочетаний 2 из 5. $C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5\cdot4\cdot3!}{2\cdot1\cdot3!} = 10$, получили 10 различных вариантов и с помощью простого перебора найдем нужное нам количество случаев, что при первых трех подбрасываний монеты выпал «орёл».

	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1.	Р	Р	О	О	О	**6.**	О	Р	О	Р	О
2.	Р	О	Р	О	О	**7.**	О	Р	О	О	Р
3.	Р	О	О	Р	О	**8.**	О	О	Р	Р	О
4.	Р	О	О	О	Р	**9.**	О	О	Р	О	Р
5.	О	Р	Р	О	О	**10.**	О	О	О	Р	Р

Такой случай 1. Находим по формуле классической вероятности ответ на наш вопрос. Р(А) – вероятность того, что при первых трех подбрасываний монеты выпадет «орёл», такой случай 1, а всего случаев когда «решек» всего две – 10 и получим: Р(А) = 1/10 = 0,1.

Ответ: 0,1.

Задача 2. Максим дважды бросает игральный кубик. В сумме у него выпало 5 очков, найдите вероятность того, что при втором броске выпало 3 очка.

***Решение*:** рассмотрим таблицу сумм чисел от 1 до 6. Всего четыре варианта, когда сумма равна 5 и 1 вариант, когда при втором броске кубика выпало 3 очка.

	Второй бросок кубика						
первый бросок кубика		**1**	**2**	~~**3**~~	**4**	**5**	**6**
	1	2	3	~~4~~	5	6	7
	2	3	4	~~5~~	6	7	8
	3	4	5	~~6~~	7	8	9
	4	5	6	~~7~~	8	9	10
	5	6	7	~~8~~	9	10	11
	6	7	8	~~9~~	10	11	12

Найдем вероятность по формуле классической вероятности: $P(A) = n/m$, где $n = 1$ и $m = 4$, $P(A) = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

Задача 3. Для некоторого стрелка вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Этот стрелок стреляет по пяти мишеням, при этом на каждую мишень ему дается не более двух выстрелов. Определите, во сколько раз вероятность события «стрелок поразит все пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно три мишени».

***Решение*:** для начала заметим, что вероятность поражения мишени при двух выстрелах равна 0,8 + 0,8·0,2 = 0,96, а вероятность промаха при двух выстрелах равна 1 – 0,96 = 0,04. Для решения данной задачи воспользуемся формулой Бернулли для нахождения вероятностей событий «стрелок поразит все пять мишеней» и «стрелок поразит ровно три мишени», а потом найдем во сколько раз одна вероятность больше другой с помощью деления.

$$\frac{C_5^5 \cdot 0,96^5 \cdot 0,04^0}{C_5^3 \cdot 0,96^3 \cdot 0,04^2} = \frac{1 \cdot 0,96^2}{10 \cdot 0,04^2} = 0,1 \cdot 24^2 = 57,6.$$

Ответ: в 57,6 раз

Задача 4. Какова вероятность, что игрок, который слабее своего оппонента в два раза выиграет две партии из трех? Ответ округлите до сотых.

***Решение*:** определим вероятности выигрыша партии для двух оппонентов: у слабого игрока вероятность выигрыша при трех играх будет 1/3, а у сильного игрока – 2/3. С помощью формулы Бернулли вычислим искомую вероятность:

$$C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = 0,22$$

Ответ: 0,22.

Задача 5. В городе 38 % взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 18,8 % взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15 %. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Решение:

	Всего	Вероятность пенсионеров	Всего пенсионеров
Мужчины	38 % =	0,38 18,8 %	= 0,188
Женщины	62 % =	0,62 15 %	= 0,15

Составим уравнение: $0,38x + 0,62 \cdot 0,15 = 0,188$.

Решая данное уравнение, получаем вероятность «выбранный мужчина является пенсионером» равна 0,25.

Ответ: 0,25.

Задача 6. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86 % случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 94 % случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10 % пациентов, направленных на тестирование.

Решение:

Подтверждает тест Положительный тест

Всего пациентов: $x + y$ 10 % = 0,1

Больных пациентов: x 86 % = 0,86

Здоровых пациентов: y 94 % = 0,94

Пусть x – число больных пациентов и y – число здоровых. Тогда всего имеется $x + y$ пациентов.

Общее число положительных ПЦР-тестов по условию равно $0,1(x + y)$, из которых $0,86x$ тестов приходится на больных пациентов и 0,06y тестов – на здоровых. Тогда составим уравнение: $0,1(x+y) = 0,86x + 0,06y \Leftrightarrow y = 19x$.

Поэтому вероятность того, что положительный ПЦР-тест был взят у больного пациента, равна (применяя классическое определение вероятности)

$$\frac{0,86x}{0,1(x+19x)} = \frac{0,86x}{2x} = 0,43.$$

Ответ: 0,43

Задача 7. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40 % яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 20 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

***Решение*:**

Вероятность закупки   Высшая категория(всего)

35 % = 0, 35

хозяйство 1: 40 % = 0,4x

хозяйство 2: 20 % = 0,2(1 – x)

Пусть x – вероятность закупки яйца в первом хозяйстве, тогда (1 – x) – вероятность закупки яйца во втором хозяйстве. Зная, что всего приобретено 35 % яиц высшей категории. Составим уравнение:

$$0,4x + 0,2(1 - x) = 0,35$$

Решая данное уравнение, получаем «вероятность закупки яйца в первом хозяйстве» равна 0,75.

Ответ: 0,75.

Небольшой вывод: чтобы выработать «иммунитет» к задачам на теорию вероятности необходимо рассматривать различные подходы в решении данных задач. И работать над этим «иммунитетом» нужно начинать как можно раньше, в 5-, 6-, и 7-х классах.

С. В. Артемьева, Т. С. Курьякова, М. В. Пономарева
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

МЕТОД ПОДСТАНОВКИ ПРИ РЕШЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнения – один из главных инструментов решения задач в школьном курсе. Им уделяется достаточно много времени – разбираются различные их виды и способы решений. Но один из наиболее интересных их видов – функциональные уравнения, затрагиваются в очень малом объеме. Несмотря на это в различных олимпиадах, вступительных испытаниях в вуз и т. п. такие уравнения встречаются.

Функциональные уравнения напрямую связаны с одной из базовых понятий алгебры – функции. Этот вид уравнений отличается от алгебраических тем, что их аргументами являются некоторые функции от независимых переменных.

Функциональные уравнения – это уравнения, которые содержат одну или несколько неизвестных функций (с заданными областями определения и значений).

Наиболее известные школьникам функциональные уравнения задают свойства функций, а именно четность, нечетность и периодичность:

$$f(x)=f(-x);\ f(-x)=-f(x);\ f(x+T)=f(x).$$

В процессе решения функциональных уравнений находится некоторая функция, которая исходное уравнение превращает в тождество при ее подстановке. Если функциональное уравнение зависит от нескольких функций, то требуется найти их все. Кроме того, решение функционального уравнения зависит от множества, на котором оно задано, так как при решении функция может от него зависеть.

Стоит отметить, что в данном виде уравнений обязательна проверка найденных функций. Так как полученная в ходе решения функция, не гарантирует что она будет удовлетворять функциональном уравнению. Данная функция только показывает какой вид примет ответ, если он существует.

В статье представлены задачи, которые решаются методом, относящимся к одним из простых и базовых, – методом подстановок или замены переменной.

Суть метода: выполняя замену некоторых переменных функционального уравнения конкретными значениями или другими выражениями, стараемся упростить данное уравнение. После чего предстоящее решение будет находиться легче.

Важным аспектом метода является нахождение подстановки, которая может быть не очевидна с самого начала.

Продемонстрируем функциональные уравнения, в котором будут рационально различные типы подстановок.

Уравнения с использованием подстановки константы

Задание 1. Решите функциональные уравнения, где x и y принимают любые действительные значения:

$$а)\ f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy$$

$$б)\ f(x)f(y)+1=f(x)+f(y)+xy$$

$$в)\ f(x+y)+f(x-y)=6\left(x^2+y^2\right)$$

Решение:

а) По условию задано, что переменные принимают любые действительные значения. Значит можем выразить одну переменную через другую. Пусть $y=x$, значит осуществим замену в уравнении относительно данной подстановки.

$$f(0)=f(x)+f(x)-2x^2 \Leftrightarrow f(0)=2f(x)-2x^2.$$

Теперь попробуем подставить еще одно значение: $y=0$. Тогда получим уравнение: $f(x)=f(x)+f(0)-0$.

Если мы перенесем все функции в последнем получившемся уравнении в одну часть, то заметим, что $f(0)=0$.

Приравняем значения $f(0)$ из двух уравнений, полученных подстановками. Приводя подобные получим неизвестную функцию:

$$2f(x)-2x^2=0 \Leftrightarrow 2f(x)=2x^2 \Leftrightarrow f(x)=x^2.$$

Теперь проверим найденное значение функции. Для этого подставим полученную функцию в исходное уравнение:

$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$$

$$x^2-2xy+y^2=x^2+y^2-2xy$$

$$0=0$$

Заметим, что проверка показала, что функция была найдена верно и имеет получившийся вид.

Ответ: $f(x)=x^2$.

б) По условию переменные x и y определены на всей числовой оси. Тогда можем предположить, что $y=x$. Выполним замену относительно данной подстановки:

$$f(x)f(x)+1=f(x)+f(x)+xy.$$

Приведем подобные относительно функции:

$$\left(f(x)\right)^2+1=2f(x)+x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2-2f(x)+1=x^2$$

$$\left(f(x)-1\right)^2=x^2$$

$$\left[\begin{array}{l} f(x)-1=x \\ f(x)-1=-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x+1 \\ f(x)=-x+1 \end{array}\right..$$

Найдено уравнение функций, удовлетворяющих исходному функциональному уравнению. Для подтверждения осуществим проверку каждой из функции:

$$1)\ (x+1)(y+1)+1= x+1+y+1+xy$$

$$xy+y+x+1+1=x+1+y+1+xy$$

$$0=0$$

$$2)\ (1-x)(1-y)+1= 1-x+1-y+xy$$

$$1-x-y+xy+1=1-x+1-y+xy$$

$$0=0$$

Проверка показала, что функции являются решениями уравнения.

Ответ: $f(x)=x+1$, $f(x)=-x+1$.

в) По условию переменные функционального уравнения определены на все числовой оси. Предположим, что $y=0$, осуществим подстановку в исходное уравнение и приведем подобные:

$$f(x)+f(x)=6x^2 \Leftrightarrow 2f(x)=6x^2 \Leftrightarrow f(x)=3x^2.$$

Получили функцию: $f(x)=3x^2$. Осуществим проверку полученного результата, подставим значение функции в исходное уравнение:

$$3(x+y)^2+3(x-y)^2=6(x^2+y^2)$$

$$3(x^2+2xy+y^2)+3(x^2-2xy+y^2)=6x^2+6y^2$$

$$6x^2+6y^2=6x^2+6y^2$$

В ходе проверки получили тождественное равенство, которое предполагает, что найденная функция имеет установленный вид и определена на всей числовой оси.

Ответ: $f(x)=3x^2$.

Уравнения вида $f(x)=g(x)$

Задание 2. Решите функциональные уравнения:

$$а)\ f(x^2+4)=x+2$$

$$б)\ f\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)=\frac{x+2}{x-2}\ \left(x\neq\frac{1}{2}, x\neq 2, x\neq\frac{5}{3}\right)$$

Решение:

а) Для решения задания необходимо в правой части уравнения выделить выражение, стоящее под знаком функции. В данном примере напрямую функцию не выделить. Значит, выражение, стоящее под знаком функции, приравняем к переменной *y*: $x^2+4=y$.

Следует учесть, что квадрат любого числа и выражения есть число неотрицательное. Следовательно, на *y* поставим ограничения: $D(y): x \geq 4$. После чего необходимо выразить *x* относительно новой переменной:

$$x^2 = y - 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{y-4} \\ x = -\sqrt{y-4} \end{array} \right.$$

Изменяем исходное уравнение относительно переменной *y*:

$$f(y) = \left[\begin{array}{l} 2 + \sqrt{y-4} \\ 2 - \sqrt{y-4} \end{array} \right.$$

Для более привычной записи функциональных уравнений *y* заменим на переменную *x*: $f(x) = \left[\begin{array}{l} 2 + \sqrt{x-4} \\ 2 - \sqrt{x-4} \end{array} \right.$

Но данное функция справедлива только для $x \geq 4$. При других значениях функция не будет существовать:

$$f(x) = \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2 + \sqrt{x-4} \\ 2 - \sqrt{x-4} \end{array} \right. & \text{\textit{при} } x \geq 4 \\ \text{\textit{не существует}} & \text{\textit{при} } x < 4 \end{cases}$$

Проведем проверку правильности нахождения функции. Для этого находим ее значение при переменной $x^2 + 4$. Обратим внимание, что данные функции принимает значения при положительных *x*, следовательно, знак модуля в процессе решения можно раскрыть:

$$1)\ f\left(x^2 + 4\right) = 2 + \sqrt{x^2 + 4 - 4} = 2 + \sqrt{x^2} = 2 + |x| = x + 2$$

$$2)\ f\left(x^2 + 4\right) = 2 - \sqrt{x^2 + 4 - 4} = 2 - \sqrt{x^2} = 2 - |x| = -x + 2$$

Следует заметить, что вторая часть функции не удовлетворяет уравнению. Значит функция примет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x-4} & \text{\textit{при} } x \geq 4 \\ \text{\textit{не существует}} & \text{\textit{при} } x < 4 \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x-4} & \text{\textit{при} } x \geq 4 \\ \text{\textit{не существует}} & \text{\textit{при} } x < 4 \end{cases}.$

б) Данная задача аналогична предыдущей, за исключением того, что в этом случае областью определения не включает некоторые точки. В ней так же следует приравнять значение, стоящее под функцией, к некой переменной *y*. После чего выразить все уравнение относительно новой переменной. Для этого проводятся тождественные преобразования и выражается x. В процессе преобразования умножается на скобку $(2x-1)$. Данная операция осуществима, так как $x \neq \frac{1}{2}$ по условию:

$$\frac{x+3}{2x-1} = y \Big| \cdot (2x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x+3 = y(2x-1) \Leftrightarrow x+3 = 2xy - y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-2y)x = -y-3 \Leftrightarrow x = -\frac{y+3}{1-2y}$$

Полученное выражение используем для замены в исходном функциональном уравнении. В процессе нахождения функции выполняем тождественные преобразования, кроме того, можем сократить на выражение $1-2y$. Так оно не равно 0 по условию. Область определения для x, так же соответствует области определения для y:

$$f(y) = \frac{-\frac{y+3}{1-2y}+2}{-\frac{y+3}{1-2y}-2} = \frac{-y-3+2-4y}{-y-3-2+4y} = -\frac{5y+1}{3y-5}.$$

Нашли функцию, зависящую от y. Сделаем замену на более привычную независимую переменную x и получим: $f(x) = -\frac{5x+1}{3x-5}$

Таким образом, нашли функцию, определенную на данной области определения. Осуществим проверку, т. е. найдем значение функции от $\frac{x+3}{2x-1}$:

$$f\left(\frac{x+3}{2x-1}\right) = -\frac{5\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)+1}{3\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)-5} = -\frac{\frac{5x+15+2x-1}{2x-1}}{\frac{3x+9-10x+5}{2x-1}} = -\frac{7x+14}{-7x+14} = -\frac{x+2}{2-x} = \frac{x+2}{x-2}.$$

Проверка показала, что функция была найдена правильно. И полученное выражение функции является корнем функционального уравнения на данной области определения.

Ответ: $f(x) = -\frac{5x+1}{3x-5}$.

Уравнения с использованием замены внутри области определения

Задание 3. Найдите все такие функции $f(x)$, определённые при всех действительных x и удовлетворяющие уравнению:

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

Решение: По условию дано, что неизвестные функции имеют областью определения всю числовую ось. Таким образом, можно сделать вывод, что, если функция определена в значении x, значит, определена в значении $1-x$. Заменим относительно новой переменной, при этом обговорив, что данные значения являются эквивалентными в данном уравнении, но не равными. Следовательно, будет верно следующее равенство: $2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$.

Значит решение данного функционального уравнения сведется к нахождению решения следующей системы:

$$\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=x^2 \\ 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2 \end{cases}.$$

Из первого уравнения системы выразим значение функции от выражения $1-x$, и подставим его во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} f(1-x)=x^2-2f(x) \\ 2\left(x^2-2f(x)\right)+f(x)=(1-x)^2 \end{cases}$$

Решим теперь получившиеся уравнение. Для этого раскроем скобки и приведем подобные как относительно функции, так относительно и переменной x:

$$2x^2-4f(x)+f(x)=1-2x+x^2$$

$$-3f(x)=1-2x-x^2 \,\big|:(-3)$$

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{3}$$

Получили значение функции: $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$. Теперь осуществим проверку, получившейся функции. Для этого подставляем в исходные данные за место функции найденную:

$$2\cdot\frac{x^2+2x-1}{3}+\frac{(1-x)^2+2(1-x)-1}{3}=x^2 \,\big|\cdot 3$$

$$2x^2+4x-2+(1-x)^2+2(1-x)-1=3x^2$$

$$2x^2+4x-2+1-2x+x^2+2-2x-1=3x^2$$

$$3x^2=3x^2$$

Следовательно, найденная функция описывает множество функций, удовлетворяющую функциональному уравнению.

Ответ: $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

Задание 4. Найдите такую функцию $f(x)$, о которой известно, что:

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot f\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right)+3 & при\ x\neq 2 \\ 0 & при\ x=2 \end{cases}$$

Решение: Рассмотрим 1 случай при $x\neq 2$: $f(x)=x\cdot f\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right)+3$. Заметим, что выражение под знаком функции не определено в точке $x=2$. Таким образом, можем сделать замену значения *x* на выражение $\dfrac{2x+3}{x-2}$, так они оба они определены в области определения данной функции. Заметим, что данные выражения не являются равными, а являются эквивалентными в условиях данного уравнения. Обратим внимание, что при подстановке данного выражения под знак функции, после выполнения преобразований остается только значения выражения *x*.

$$f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right)=\frac{2x+3}{x-2}\cdot f(x)+3.$$

Подставляем данное уравнение в исходное. После чего в уравнении раскрываем скобки, приводим подобные и находим значения функции. Следует уточнить, что при решении происходит деление на дробь, в данном случае эта операция выполнима, потому что дробь не принимает значение 0.

$$f(x)=x\cdot\left(\frac{2x+3}{x-2}\cdot f(x)+3\right)+3 \Leftrightarrow f(x)=\frac{2x^2+3x}{x-2}\cdot f(x)+3x+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{2x^2+3x}{x-2}\right)\cdot f(x)=3x+3 \Leftrightarrow \frac{x-2-2x^2-3x}{x-2}\cdot f(x)=3x+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2-2x-2}{x-2}\cdot f(x)=3x+3$$

$$\frac{-2(x^2+x+1)}{x-2}\cdot f(x)=3x+3 \left| : \frac{-2(x^2+x+1)}{x-2}\neq 0 \right.$$

$$f(x)=-\frac{(x+1)(x-2)}{2(x^2+x+1)}$$

Теперь следует проверить случай при $x=2$. Для этого подставляем данное значение в функцию. Можно заметить, что скобка в числителе дроби даст 0. Значит функция примет значение 0 в этой точке.

Осуществим проверку случая, когда $x\neq 2$. Для этого за место функции, подставляем найденную. После ряда преобразований можно заметить, что получается тождественное равенство. Значит найденная функция удовлетворяет заданной системе уравнений.

Ответ: $f(x)=-\dfrac{(x+1)(x-2)}{2(x^2+x+1)}$.

Стоит отметить, что функциональные уравнения используются в различных областях математики, в особенности в случаях, когда требуется описать все функции, обладающими заданными свойствами.

Статья будет полезна учителю математики для подготовки учащихся по теме «Функциональные уравнения», а также обучающимся для внеучебной работы.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Решить функциональные уравнения ($D(f) = R$):

$$а)\, f(x+y) = f(x) + y; \qquad б)\, f(x+y) = f(x)\cdot e^y$$

$$в)\, f(x+y) = \left(f(x)\right)^y \qquad г)\, f(xy) = \left(f(x)\right)^y$$

$$д)\, f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y$$

$$е)\, f(x+y) + f(x-y) = 2x^2 + 2y^2$$

Задание 2. Найдите все такие функции $f(x)$, что $f(2x+1) = 4x^2 + 14x + 7$.

Задание 3. Функция $f(x)$ определена и удовлетворяет соотношению:

$$(x-1)\, f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$$

при всех $x \neq 1$. Найдите все такие функции.

Задание 4. Решите функциональное уравнение:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x \ \left(x \neq 0, x \neq \pm 1, x \neq 2\right).$$

Ответы: 1) а) $f(x) = a + x$; б) $f(x) = a\cdot e^x$; в) $f(x) = 1$; г) $f(x) = a^x$, $a > 0$; д) $f(x) = x$; е) $f(x) = x^2$, 2) $f(x) = x^2 + 5x + 1$, 3) $f(x) = 2x + 1$, 4) $f(x) = \dfrac{4x+5}{3(1-x)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. А., Кузьмин Ю. Н., Савин А. Н. Функциональные уравнения. 3-е изд. Самара : Пифагор, 1997. 45 с. (Серия А: Математика).

2. Бродский Я. С., Слипенко А. К. Функциональные уравнения. Киев : Вища школа. Головное издательство., 1983. 96 с.

3. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра : учеб. пособие для учащихся 7–11 кл. Челябинск : Взгляд, 2004. 448 с.

4. Функциональные уравнения и неравенства. URL: https://mathus.ru/ (дата обращения: 03.03.2023).

С. В. Артемьева, Т. С. Курьякова, Я. А. Свинкина
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

ЗАНЯТИЕ ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ ПО ТЕМЕ «КРЕДИТЫ» С ПРИМЕНЕНИЕМ ИГРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Задача с экономической направленностью – одно из заданий второй части варианта ЕГЭ по математике (профильный уровень, задание № 15). Согласно статистике с течением времени увеличивается процент выпускников, верно описывающих математическую модель и доводящих решение до верного ответа. Проведение элективных курсов по этой тематике, как правило, планируют на 10-й класс (что целесообразно, ввиду загруженности учебной программы в 11-м классе). Накопленный опыт решения задач дает учителю возможность в конце 10-го и на протяжении 11-го классов проводить занятия, актуализирующие навыки решения задач по экономической тематике с использованием игровых технологий (так как после изучения содержания элективного курса обучающиеся способны полноценно включаться в игру, повторяя тему и закрепляя навыки решения задач).

Под *задачами на банковские проценты* мы понимаем задачи, сюжет которых содержит банковские операции (капитализация вкладов и кредитование), предполагающие выполнение необходимых расчётов на представленных условиях. Практическая ориентированность и прикладная направленность – основные особенности этих заданий.

Помимо теоретических знаний экономической сферы такие задания также проверяют математические знания и умения:

– умение строить и исследовать математические модели;

– умение выполнять вычисления и преобразования;

– умения решать уравнения и неравенства (их системы);

– умение использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

Как было отмечено, для старшеклассников важно отрабатывать навыки решения задач на банковские проценты, поддерживать интерес к этой теме, особенно если элективный курс уже пройден. Мы считаем, что наиболее эффективным способом для этого выступают занятия с применением игровых технологий. Приведем пример одного из таких занятий по теме «***Кредиты***». Оно разработано с целью отработки и закрепления навыков по решению задач на кредиты. Его проведение предполагает организацию групповой работы, что требует соблюдения определённых правил, которые мы постарались учесть при разработке плана занятия.

Цель занятия: организация работы по актуализации знаний и умений, необходимых для решения задач на банковские проценты и по изучению задач на смешанные схемы выплат кредита; содействие формированию универсальных учебных действий, таких, как:

– *личностных УУД*: смыслообразование посредством мотивации, осуществляющейся при постановке проблемной ситуации, и целеполагания;

– *регулятивных УУД*: целеполагание, оценка того, что уже усвоено учащимися и что ещё нужно усвоить;

– *познавательных УУД*: выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий, моделирование, построение логической цепи рассуждений;

– *коммуникативных УУД*: умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли, постановка вопросов при поиске и сборе информации.

1. *Подготовительный этап*

Цель: актуализировать опорные знания и умения: знание видов схем кредитования и их сущность, умение определять выгодность кредита для заёмщика, умение находить выплаты по кредиту, умение составлять математическую модель задачной ситуации.

Метод: репродуктивный.

Оборудование: презентация, раздаточный материал (карточка с задачами).

На подготовительном этапе урока учитель актуализирует необходимые знания, умения и навыки при проведении игры «Математический пазл» (длительность игры – 3 минуты).

Правила игры: В течение трёх минут внимательно изучить условия задачи (договора) и восстановить недостающие фрагменты решения задачи.

Деятельность учителя: Объясняет правила обучающимся и раздаёт карточки с недостающими фрагментами решения. Следит за временем, пока ученики выполняют задание, и после того, как все справятся, демонстрирует на презентации правильное решение. Обсуждает вместе с учениками ошибки.

Деятельность обучающихся: Выполняют задание в группе: изучают все условия, выполняют решение задачи, чтобы определить, каких фрагментов не хватает и заполняют их.

Карточка с фрагментами

(*содержит формулировку задачи и решение с пропусками*):

15-го декабря планируется взять кредит в банке на *26* месяцев.
Условия возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на *3%* по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на *20* тысяч рублей меньше долга на 15-число предыдущего месяца;
– 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Чему равна сумма взятого в банке кредита, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит *1407* тысяч рублей?

Решение: обозначим сумму взятого в банке кредита за S. Вся история выплат будет выглядеть следующим образом:

Месяц	*Выплаты*	*Остаток*
1	$20+\frac{3}{100}\cdot S$	$S-20$
2	$20+\frac{3}{100}\cdot(S-20)$	$S-40$
3	$20+\frac{3}{100}\cdot(S-40)$	
…		
25	$20+$	$S-500$
26	$(S-500)+\frac{3}{100}\cdot(S-500)$	0

Посчитаем общую сумму выплат по данным таблицы:

$$20+\frac{3}{100}\cdot S+20+\frac{3}{100}\cdot(S-20)+\qquad+\ldots+20+\frac{3}{100}\cdot(S-480)$$

$$+(S-500)+\frac{3}{100}\cdot(S-500)=S+\frac{3}{100}\cdot\big(S+(S-20)+\qquad+\ldots+(S-500)\big)=$$

$$=S+\frac{3}{100}\cdot\big(26S-(20+40+\ldots+500)\big)=S+\frac{3}{100}\cdot\left(26S-\frac{20+500}{2}\cdot 25\right)=$$

$$=S+\frac{3}{100}\cdot(26S-260\cdot 25)=\qquad=1{,}78S-195.$$

Так как согласно условию задачи, общая сумма выплат составила рублей, то:

$1{,}78S-195=1407 \Rightarrow 1{,}78S=1602 \Rightarrow S=$ тыс. рублей – сумма взятого кредита.

По условию задачи необходимо найти остаток долга на 25-й месяц, т.е. $S-500=900-500=400.$

Ответ: 400 тыс. рублей.

2. *Мотивационный этап*

Цель: побуждение интереса к изучению смешанной схемы погашения кредита и решению задач, содержащих её.

Вид мотивации: показ нового понятия.

Приём: применение понятия в практической деятельности людей.

Оборудование: карточки с договорами.

Деятельность учителя: Заранее распределяет учеников по группам – аналитическим отделам (по сценарию урока). Учитель на уроке играет роль заёмщика, который просит помощи у обучающихся определить выгодный для себя вариант взятия кредита. Рассказав историю, он раздаёт карточки с условиями договоров банков и даёт несколько минут ученикам ознакомиться с ними (задачи также выведены на интерактивной доске). После этого происходит беседа об условиях банков.

Деятельность учеников: Слушают историю учителя, изучают полученные фрагменты договоров и обсуждают вместе с учителем новый способ погашения кредита.

Легенда учителя: Ребята, недавно я решила взять кредит в размере 1 489 500 рублей под 10 % годовых на 7 лет. Я обратилась в несколько банков, чтобы узнать на каких условиях выплачивается кредит по их договору, и выбрать наиболее выгодный вариант. Помогите мне определить наиболее выгодный договор. Для этого нужно рассчитать каждую выплату за весь период погашения кредита и общую сумму выплат как в представленном образце.

На этапе целеполагания учитель задаёт вопросы:

– Какой способ погашения кредита представлен во фрагментах?

– Встречали ли вы его ранее?

– Как вы думаете, какая цель нашего занятия?

– Как рассмотреть все условия и определить выгодность кредита?

3. *Этап применения знаний и способов деятельности*

Цель: изучение одного из способов погашения кредита.

Метод: частично-поисковый.

Оборудование: чистые бланки (для расчётов), образцы таблиц.

Деятельность учителя: Даёт несколько минут ученикам для распределения ролей (табл. 1) и проводит инструктаж.

Деятельность учеников: Ученики слушают инструктаж учителя и задают возникающие вопросы, после чего распределяют роли. Получив задание, приступают к работе в группах: анализу поставленной задачи, расчётам выплат, описанных в договорах, и оформлению полученных результатов.

Инструктаж:

– Каждый из трёх аналитических отделов сейчас получит по карточке с условиями договора о взятии банковского кредита, карточки с образцами договоров (для каждой группы свой), карточки, где оформляется решение;

– Вы, как сотрудники аналитических отделов, в течение 20–25 минут изучаете договоры, выполняете расчёты выплат и оформляете в виде таблицы, образец которой приложен;

– После того как все закончат работу, руководитель отдела подаёт знак о выполнении задания, при этом закончивший работу отдел ожидает окончание работы сотрудников других отделов;

– Руководитель должен подготовить отчёт по работе и продемонстрировать результаты на доске в виде таблицы;

– В случае необходимости я могу ответить на возникшие вопросы.

Роли учеников. Ученики выступают в качестве работников аналитических отделов, перед которыми поставлена основная задача – определить выгодность кредита и рассчитать выплаты за весь период кредитования (роли описаны в табл. 1).

Таблица 1

Руководитель аналитического отдела	*Оформитель решения*	*Ученик, фиксирующий результаты*	*Сотрудник (2 ученика)*
1) Следит за работой внутри мини-группы; *2*) Контролирует время; 3) Представляет результаты.	После обсуждения вместе с остальными учениками оформляет решение.	Записывает в соответствии с образцом результаты вычислений.	Выполняют основные вычисления, участвуют в обсуждении.

Деятельность учителя: Демонстрирует образец табличного договора и объясняет, как правильно заполнять уже в соответствии с полученными договорами.

Образец для заполнения при выполнении задания:

Таблица 2

№ (п/п)	*Дата*	*Выплаты*
1	*20.04.2022*	
2	*20.04.2023*	
3	*20.04.2024*	
4	*20.04.2025*	
5	*20.04.2026*	
6	*20.04.2027*	
7	*20.04.2028*	

Карточки с условиями договора:

I аналитический отдел. За первые *4* года выплачиваются две трети взятой суммы по дифференцированной схеме (т. е. долг каждый год уменьшался на одну и ту же величину), а за следующие 3 года равными платежами погашается весь кредит.

II аналитический отдел. Две трети взятой суммы в кредит выплачиваются за 3 года равными платежами, а за следующие 4 года оставшаяся часть кредита погашается по дифференцированной схеме (т. е. долг каждый год уменьшался на одну и ту же величину).

III аналитический отдел. За 3 года выплачивается одна четверть от взятой суммы по дифференцированной схеме (т. е. долг каждый год уменьшался на одну и ту же величину), а за следующие 4 года равными платежами погашается весь кредит.

3. *Этап подведения итогов урока.*

Цель: проанализировать сущность изученного способа погашения кредита и выгодность всех условий договоров.

Деятельность учителя: Сообщает ученикам об окончании времени и просит подвести итоги каждого отдела. В момент выступления каждой группы проверяет рассчитанные платежи и общую сумму выплат кредита, которые руководители отделов записывают на доске. После выступления руководителей проводит опрос о проделанной работе и выводах.

Деятельность учеников: Подводят итоги, руководители отделов вместе выходят к доске и записывают полученные результаты. Защищают свои работы и возвращаются на места.

Рекомендуемые вопросы учителя:

1. Почему среди посчитанных вами платежей некоторые получились равные, а другие все различны?

2. Как вы думаете, что влияет на размер общей суммы выплат?

3. Почему суммы выплат разные, несмотря на то, что кредит, процентная ставка и срок кредитования оставались неизменными во всех договорах?

4. Как вы думаете, какую схему погашения кредита чаще всего практикуют современные банки?

5. Какой банк предоставил наиболее выгодные условия учителю и почему?

4. *Рефлексия*

Цель: провести анализ выполненной работы на уроке и подвести итоги.

На этапе рефлексии проводится небольшая беседа – анализ проведённой работы на уроке. Учитель спрашивает о том, что нового узнали ученики (возвращается к цели урока) и выставляет оценки за урок.

О. И. Бычкова
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск
МБОУ г. Иркутск «Гимназия № 1»,
Е. Ю. Субботина
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ УМЕНИЯ РАБОТАТЬ В КОМАНДЕ И ПОСТРОЕНИЯ КОММУНИКАЦИЙ

Быстро происходящие изменениям во всех сферах жизнедеятельности общества требует адаптации системы образования к данным условиям, влекущей появления нововведений, в том числе и появления новых взглядов на профессиональные компетенции. В настоящее время к «навыкам XXI века» относятся ***soft skills*** (*мягкие навыки*), под данным терминам понимают умения, которые не связаны непосредственно с профессиональной деятельностью человека, но влияют на его на успех в работе. Исследования Гарвардского университета и Стэнфордского института показали, что профессиональный успех человека на 85 % зависит ***soft skills,*** и только 15 % приходится на ***hard skills*** (*узкие профессиональные навыки*) [1]. В связи с тем что ***soft skills*** нужны в любом виде деятельности человека, возникает необходимость начинать формировать их уже на этапе обучения в школе. Однако нужно понимать какие конкретно умения входят в понятия «*мягкие навыки*». АСИ (агентство стратегических инициатив) в рамках стратегической инициативы «Навыки будущего» опубликовало требования к обучению данным навыкам. К базовым навыкам были отнесены группы умений:

– умение мыслить критически и логически;
– проявлять изобретательный подход для решения поставленных задач;
– работа в команде и построение коммуникаций [2].

Рассмотрим последнюю группу умений, формирование которых в школьном курсе возможно осуществлять в процессе организации групповой работы. От качества организации групповой работы зависит эффективность достижения поставленных целей обучения, поэтому необходимо соблюдать требования к ее организации. В процессе анализа педагогической и методической литературы нами были выделены следующие требования к организации групповой работы:

1. Соблюдение организационной структуры групповой работы на уроке.
2. Выбор способа комплектования групп.
3. Выбор длительности существования групп.
4. Определение количества обучающихся в каждой группе.
5. Выбор способа распределения ролей внутри группы.
6. Отбор или разработка группового задания.
7. Организация рабочего пространства.
8. Выбор средств организации групповой работы.

Мы считаем, что средством организации групповой работы может быть лабораторная работа, включающая в себя этап выполнения группового задания, т. к. она имеет четкую структуру проведения, а задание возможно разделить на подзадачи, которые будут делегированы членам группы.

Этапы выполнения лабораторной работы должны быть адаптированы относительно этапов работы в группе. На основе структуры групповой работы, предложенной И. Б. Первином и М. Д. Виноградовой [3], нами были выделены этапы групповой лабораторной работы.

Рассмотрим пример групповой лабораторной работы на уроке открытия нового знания в 7-м классе по теме «Неравенство треугольника» согласно выделенным этапам.

1-й этап. Подготовительный этап групповой работы

Целью данного этапа является актуализация знаний, умений и навыков, необходимых для выполнения лабораторной работы. Осуществление данного этапа содействует уменьшению вероятности появления у обучающихся затруднений при выполнении заданий.

В контексте рассматриваемой лабораторной работы по теме «Неравенства треугольника» необходимо актуализировать знание определения понятия «треугольник» и умение распознавать элементы треугольника.

2-й этап. Организационный этап групповой лабораторной работы

Перед непосредственным проведением работы необходимо организовать деятельность по формированию мотивации обучающихся для ее выполнения. Возможно использовать в качестве приема мотивации: проблемную ситуацию.

В данной лабораторной работе перед учениками сначала ставится вопрос: «Из любых ли трех отрезков возможно составить треугольник?». В процессе обсуждения предлагаемых школьниками ответов учитель подводит их к необходимости проведения исследования. Для рассмотрения большего количества исследуемых объектов, классу предлагается разделиться на группы по 4 человека и распределить обязанности внутри группы. Используемое нами распределение ролей и обязанности каждой роли представлено в табл. 1. Затем проводится подробный инструктаж для учеников о последовательности предстоящей работы.

Таблица 1

Распределение ролей в группе

Роль	Обязанности
Организатор	*Организатор отвечает за работу всей группы!* – планирует работу всей группы; – распределяет обязанности; – следит, что бы все выполняли свою работу и обязанности.
Секретарь	Оформляет отчетность группы
Тайм-менеджер	Следит за соблюдением регламента работы группы
Оратор	Защищает работу группы

Следующим шагом осуществляется выдача группам раздаточного материала. В раздаточный материал входят: лист с печатной основой для оформления отчетности группы (в нем отражена тема, цель и план работы), индивидуальные карточки и модели отрезков из бумаги. Если группа состоит из «слабых» учеников, то в раздаточный материал входят вопросы для обсуждения. Ниже в табл. 2 представлен лист с печатной основой, который выдается каждой группе.

Таблица 2

Лист с печатной основой

Лабораторная работа **Тема:** «Неравенство треугольника». **Цель:** сформулировать условие существования треугольника. **Оборудование:** раздаточный материал, модели отрезков. ***План работы*** **1 шаг** (2 *мин*.). Выполнить самостоятельно индивидуальную карточку. **2 шаг** (3 *мин*.). Проанализировать в группе полученные индивидуальные результаты. **3 шаг** (3 *мин*.). На основе проведенного анализа, ответить на представленные вопросы для обсуждения. **4 шаг** (2 *мин*.). Записать вывод к лабораторной работе. *Общее время выполнения*: 10 минут. **ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ** 1. Из любых ли трех отрезков возможно составить треугольник? _________ 2. Какое требование должно выполняться, чтобы можно было построить треугольник? ______________________________ **ВЫВОД** ______________________________ ______________________________

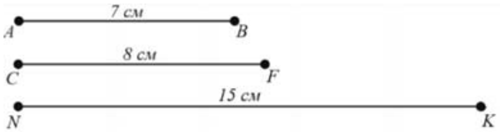
3-й этап. Этап непосредственного выполнения групповой лабораторной работы

Непосредственное выполнение предоставленных заданий можно условно разделить на две части: выполнение обучающимися индивидуального задания и совместную работу группы. Работа всей группы будет базироваться на результатах выполненных индивидуальных заданий. Такое распределение работы позволяет вовлечь в данный процесс каждого ученика.

Каждому ученику выдается индивидуальная карточка с печатной основой и модели отрезков, представленных на карточке. Для выполнения индивидуального задания обучающимся необходимо попробовать составить треугольник из предложенных моделей отрезков из бумаги, а затем провести сравнение длин этих отрезков. Все вычисления выполняются на индивидуальной карточке. Пример индивидуальной карточке представлен в табл. 3.

Таблица 3

Индивидуальная карточка

<table>
<tr><td colspan="2">ФИ: ______________________________</td></tr>
<tr><td colspan="2">I вариант</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Возьмите модели отрезков и попробуйте составить из них треугольник. Получилось? __</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2. Сравните длину каждого отрезка с суммой длин других двух отрезков.

AB ☐ $CF + NK$
CF ☐ $AB + NK$
NK ☐ $AB + CF$</td></tr>
</table>

По окончанию выполнения индивидуального задания у двух учеников группы получится составить треугольник из предложенных отрезков, а у остальных участников группы это будет невозможно.

После того, как все обучающиеся в группе выполнят индивидуальное задания, группа переходит к анализу полученных результатов. Пытаются выяснить характеристики конструкций позволяющих замкнуть цепочку отрезков в треугольник. На данном этапе осуществляется групповое взаимодействие. У обучающихся возникает необходимость объединить полученные данные для достижения цели лабораторной работы, т. е. осуществить сотрудничество, требующее использование коммуникативных умений.

В конце данного этапа обучающиеся на основе проделанной работы приходят к выводу, что треугольник существует, если длина каждой его стороны меньше суммы длин двух других его сторон.

4-й этап. Заключительный.

На заключительном этапе группы сообщают о результатах проделанной работы. После чего проводится рефлексия, посредством которой ученики определяют решили ли они проблемную ситуацию. В процессе обсуждения выясняется, что так как они при шли к выводу на основе рассмотрения нескольких частных случаев, то он является гипотезой, требующей доказательство.

Таким образом, правильно организованная лабораторная работа может служить средством развития у обучающихся умений работать в команде и построения коммуникаций. Также применение лабораторных работ положительно влияет на мотивацию обучающихся, так как из объекта научения они становятся субъектами собственной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klaus P. Communication breakdown // California Job Journal. 2010. N 28. P. 1–9.

2. URL: https://komiedu.ru/upload/iblock/7fa/ASI-proekty.pdf (дата обращения: 18.03.2023)

3. Виноградова М. Д., Первин И. Б. Коллективная познавательная деятельность и воспитание школьников: монография. М. : Просвещение, 1977. 159 с.

А. О. Василевская
МОУ Школа № 3, г. Черемхово

ЭФФЕКТИВНЫЕ ФОРМЫ РАБОТЫ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К РЕШЕНИЮ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ ИЗ МАТЕРИАЛОВ ОСНОВНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА

Одним из направлений модернизации современного математического образования является усиление прикладной направленности школьного курса математики, т. е. осуществление связи его содержания и методики обучения с практикой [1]. Приоритетные направления с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта – это системно-деятельностный подход, развитие метапредметных связей, эффективная работа с информацией, переход от сухого изучения теоретических терминов к практическому применению знаний на практике, умение пользоваться справочной информацией. В связи с этим в контрольно-измерительные материалы по математике для выпускников 9-го класса с 2020 г. были внесены изменения: добавлены пять практико-ориентированных задач.

Практико-ориентированная задача – это вид сюжетных задач, требующий в своем решении реализации всех этапов метода математического моделирования. Прикладная направленность обучения математике предполагает ориентацию его содержания и методов на тесную связь с жизнью и основами других наук, а также на подготовку обучающихся к использованию математических знаний в предстоящей профессиональной деятельности, на широкое применение в процессе обучения современной электронно-вычислительной техники. Прикладная и практическая направленность неразрывны, они переплетаются в реальном учебно-воспитательном процессе. Практика показывает, что обучающиеся с интересом решают и воспринимают задачи практического содержания, с увлечением наблюдают, как из практической задачи возникает теоретическая, и как чисто теоретической задаче можно придать практическую форму.

Однако педагоги столкнулись с проблемой – в учебниках математики таких задач практически нет. В методических пособиях практико-ориентированные задачи встречаются редко. Такие задачи подобраны на сайте Федерального института педагогических измерений и, соответственно, в сборниках для подготовки к основному государственному экзамену [2]. Подбор задач, формирующих элементарные навыки приложения математики, дело непростое. Поиск и систематизация поучительных и, в то же время, достаточно простых задач подобного рода – весьма актуальная проблема.

Часто у обучающихся возникает мысль, что задачи бывают двух видов – прикладные, т. е. нужные в жизни, и непрактические, которые в жизни, по их мнению, не понадобятся. Для устранения таких ошибок целесообразно использовать любую возможность для демонстрации того, что абстрактная задача может быть связана с прикладными задачами. Решение практико-ориентированных задач эффективно лишь тогда, когда обучающиеся могут визуализировать описываемую ситуацию, так как могли столкнуться с ней в жизни.

Также при подготовке к изучению таких задач необходимо учитывать и способы восприятия материала учащимися, так как одним будет достаточно прочесть материал, а другим важно увидеть процесс в действии, выполнить его своими руками, услышать от другого человека.

Одним из эффективных средств для такого способа подачи материала является широкое использование наглядности: видеосюжетов, фотографий, слайдов, плакатов, рисунков, на которых можно рассмотреть необходимые объекты и их искомые элементы. Кроме этого, можно привлекать учащихся к тому, чтобы они сами готовили наглядный материал для занятий.

Так, например, есть один из видов практических задач – «Печь для бани». На черно-белых рисунках пособий показана печь, определены её элементы. Многие ученики, которые живут в благоустроенных квартирах и никогда не были в бане, будут с трудом воспринимать этот рисунок и всё, о чём говорится в такой задаче. Поэтому перед непосредственным изучением решения данного вида задач необходимо наглядно объяснить, какие бывают виды печей, где и как их устанавливают, что нужно для установки, какие виды топлива для печей существуют, рассмотреть наиболее современные и соответствующие данному заданию рисунки и фотографии. Для этого целесообразно привлекать самих учащихся, а именно тех, в домах которых есть печи. При подготовке к изучению данного вида задач необходимо дать ученикам задание: сфотографировать или снять на видео свою печь, подготовить краткий рассказ о том, из чего она изготовлена, чем ее можно растопить, каков расход и цена отопительных материалов. Рассмотрев на занятии все эти примеры и образцы, учащиеся смогут глубже окунуться в разбор материала, интерес к решению данного вида задач будет полноценным.

Большую проблему у ребят вызывает решение задач вида «Маркировка автомобильных шин». Несмотря на то что многие ученики уже в 9-м классе начинают обучаться в автошколах, они не задумывались о том, что есть шины радиальные и диагональные, в чем их отличие, а в условии задачи встречаются такие названия. Поэтому при подготовке к разбору данного вида задач, учителю можно заранее найти или попросить учащегося подготовить доклад про автомобильные шины с показом мультимедийной презентации или соответствующего видео. Также можно попросить ребят, в семьях которых есть автомобили, сфотографировать маркировку на автомобильной шине. Тогда можно будет в сравнении показать, какая шина больше по размеру, и от чего это зависит. Кроме этого, в одной из задач про шины требуется высчитать затраты на замену зимней и летней резины. Для этого заранее можно озадачить учащихся проблемой – какова же сегодня стоимость на замену резины на ближайшей станции технического обслуживания на конкретный автомобиль, тогда можно будет провести сравнительный анализ расходов, что привлечет еще большее внимание к решению задач учащимися.

На первый взгляд кажется доступной для восприятия задача «План участка», потому что условные обозначения изучаются еще и на курсе «Окружающий мир» и «География», да и посчитать такие величины, как площадь или периметр какого-либо объекта, не составляет большого труда. Но в данном виде задач встречаются те, для которых необходимо базовое понимание о системах отопления в частном доме. И опять вопрос – как объяснить детям, что такое «отопительный котёл», если они видели у себя в квартире только обычные радиаторы, а также как рассчитать стоимость разных видов отопления, если оплату по коммунальным счетам выполняют родители? У детей, проживающих в квартирах, нет понимания, что за оборудование устанавливается в частном доме и по подобным вопросам. Для решения данной задачи нам снова понадобится предварительная подготовка, как со стороны учителя, так и со стороны ребят, у которых в доме есть такое оборудование. Учащиеся могут поделиться фотографиями или видеосюжетами по данной теме, а также привести примеры конкретных расчетов за отопление, привлекая к этому своих родителей.

Один из видов задач «Листы бумаги» также интересен по своему содержанию, здесь можно вместе с учениками на занятии выполнить разрезание наибольшего формата листа А0 на разные форматы. Тогда учащиеся с тактильным восприятием смогут своими руками выполнять разрезание листов и на практике освоить, как из одного формата можно получить другой. И, конечно же, восприятие самих задач у них будет лучше, чем при объяснении на рисунках учителя или рисунках в условии задачи.

Самой доступной к самостоятельному решению является тип задач «Тарифный план». Во-первых, в заданиях встречаются графики, а как показывает практика, с графиками учащиеся работают хорошо – умеют извлекать необходимую информацию, анализировать и сравнивать результаты. Во-вторых, в современной жизни каждый школьник уже с начальной школы пользуется мобильной связью, а в более старшем возрасте уже знаком с разными тарифными планами, многие ребята самостоятельно осуществляют оплату. Поэтому здесь можно применить форму деловой игры, например, в процессе решения таких задач провести конкурс на лучшего оператора мобильной сети. К тому же деловые игры в старших классах – это путь к профессиональному самоопределению, к формированию компетентностного подхода в понимании порядка своих действий.

Задачи с практическим содержанием помогут обучающимся проявить интерес к предмету, поскольку для подавляющего большинства учеников ценность математического образования состоит в её практических возможностях. Включение практико-ориентированных задач в отдельные разделы школьного курса математики – это одно из важных направлений в развитии школьного математического образования. Применяя разнообразные эффективные формы работы при подготовке к решению данного вида задач, учитель не только повышает интерес к предмету, но и качество результата, полученного на выпускном экзамене.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сайт для учителей. URL: https://kopilkaurokov. ru/matematika/prochee/rol-prikladnykh-zadach-v-formirovanii-matiematichieskoi-kul-tury-shkol-nika (дата обращения: 07.03.2023)
2. Федеральный институт педагогических измерений. URL: https://fipi. ru/ (дата обращения: 07.03.2023)

Н. В. Гусляков
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

ТЕОРЕМА НЬЮТОНА – СИЛЬВЕСТРА ДЛЯ ОЦЕНКИ КОЛИЧЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

В курсе алгебры большое внимание уделяется вопросу поиска корней многочленов, так как эта задача имеет фундаментальное и прикладное значение. Для многочленов степени большей 5 в общем случае не существует формул выражения корней через коэффициенты многочленов. Поэтому в теории многочленов были разработаны теоремы о нахождении корней многочленов и об определении их границ, если рассматриваются многочлены над числовыми полями.

В этой работе мы рассмотрели теоремы, с помощью которых можно определить, имеются ли корни и какое их количество на заданных промежутках.

Теорема Ньютона – Сильвестра [1, с. 40]

Пусть $f(x)$ – многочлен степени n без кратных корней. Тогда число корней многочлена $f(x)$, заключенных между a и b, где $f(a)f(b) \neq 0$ и $a < b$, не превосходит как $N_+(b) - N_+(a)$, так и $N_-(a) - N_-(b)$

Данную теорему сформулировал еще Ньютон, но доказал лишь Сильвестр в 1871 г. Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) является одним из самых знаменитых математиков Викторианской Англии. Сильвестр получил фундаментальные результаты в теории инвариантов, полилинейной алгебре, теории чисел и комбинаторике.

Эта теорема дает нам один из методов для поиска количества корней. Реализация метода требует применения достаточно сложных алгебраических операций.

Нас интересует вопрос об использовании этого раздела теории многочленов при написании исследовательских проектов обучающимся 9–11-х классов по математике. Заметим, что теорема использует основные понятия теории многочленов, знакомые школьникам из курса алгебры и математического анализа. Производную здесь можно рассматривать как формальную операцию для многочленов, производимую по определенным правилам (если не рассматривать вопрос доказательства теоремы).

Можно предложить школьникам задание построить на основании теоремы Ньютона-Сильвестра алгоритм и реализовать его на каком-либо языке программирования.

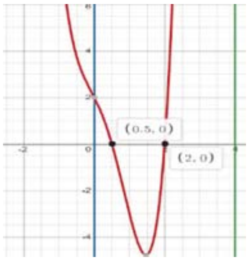
Алгоритм реализации теоремы Ньютона – Сильвестра

1. Ищем все производные от многочлена $f(x)$:
$f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$
2. Ищем последовательность $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ по формуле :

$$f_i(x) = \frac{(n-i)!}{n!} f^{(i)}(x)$$

3. Ищем последовательность $F_0(x), F_1(x), \dots, F_n(x)$ по формулам:
$F_0(x) = f(x); F_n(x) = f_n^2(x); F_i(x) = f_i^2(x) - f_{i-1}(x) f_{i+1}(x)$
4. Подставляем a и b в получившиеся последовательности, где $a < b$.
5. Рассмотрим пары f_i и f_{i+1} , у которых $sgnF_i = sgnF_{i+1}$
6. Тогда $N_+(x)$ – количество пар для которых $sgnf_i = sgnf_{i+1}$, тогда $N_-(x)$- кол-во пар для которых $sgnf_i = -sgnf_{i+1}$
7. Получим, что число действительных корней на отрезке $[a; b]$ не будет превосходит ни $N_-(a) - N_-(b)$, ни $N_+(b) - N_+(a)$

С помощью построенного алгоритма школьник может провести небольшое исследование теоремы, рассмотреть, как она применяется для многочленов различных степеней.



Рассмотрим пример реализации теоремы Ньютона – Сильвестра с помощью выведенного алгоритма для многочлена $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2$ на отрезке $[0; 4]$, по графику видно, что на данном отрезке находятся два корня $x = 0{,}5$ и $x = 2$.

1) $f^{(1)}(x) = 8x^3 - 9x^2 - 2x - 3$
$f^{(2)}(x) = 24x^2 - 18x - 2$
$f^{(3)}(x) = 48x - 18$
$f^{(4)}(x) = 48$
2) $f_0(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2$
$f_1(x) = 2x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
$f_2(x) = 2x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}$
$f_3(x) = 2x - \frac{3}{4}$
$f_4(x) = 2$
3) $F_0(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2$
$F_1(x) = \frac{43}{48}x^4 + \frac{13}{4}x^3 - \frac{121}{24}x^2 + \frac{13}{4}x + \frac{43}{48}$
$F_2(x) = \frac{43}{48}x^2 + \frac{13}{8}x - \frac{77}{144}$
$F_3(x) = \frac{43}{48}$
$F_4(x) = 4$

4)

Пусть a=0, тогда		Пусть $b = 4$, тогда	
$f_0(a) = 2$	$F_0(a) = 2$	$f_0(b) = 294$	$F_0(b) = 294$
$f_1(a) = -\frac{3}{4}$	$F_1(a) = \frac{43}{48}$	$f_1(b) = \frac{357}{4}$	$F_1(b) = \frac{9264}{25}$
$f_2(a) = -\frac{1}{6}$	$F_2(a) = -\frac{77}{144}$	$f_2(b) = \frac{155}{6}$	$F_2(b) = \frac{203}{10}$
$f_3(a) = -\frac{3}{4}$	$F_3(a) = \frac{43}{48}$	$f_3(b) = \frac{29}{4}$	$F_3(b) = \frac{9}{10}$
$f_4(a) = 2$	$F_4(a) = 4$	$f_4(b) = 2$	$F_4(b) = 4$

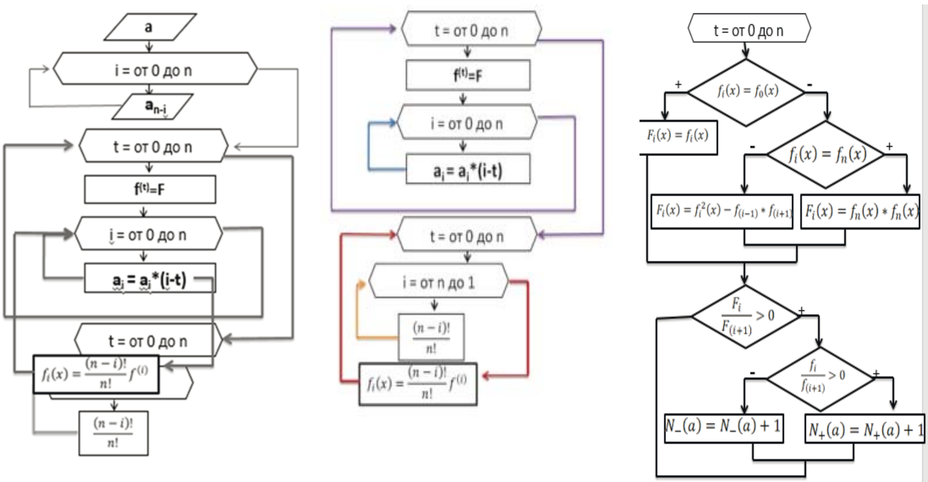
5) Рассмотрим пары $f_i = f_{i+1}$, у которых $sgnF_i = sgnF_{i+1}$
6) $N_+(a) = 0; N_-(a) = 2; N_+(b) = 4; N_-(b) = 0$
7) Найдем верхние границы:

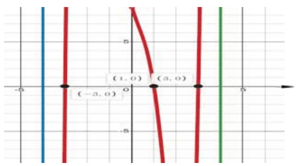
$$N_+(b) - N_+(a) = 4$$
$$N_-(a) - N_-(b) = 2$$

Тогда количество корней не превосходит 2 и не превосходит 4.

Следовательно, количество корней не превосходит 2 (≤ 2)

В качестве примера того, в чем будет заключаться работа обучающегося, мы разработали программу на языке программирования PascalABC. Алгоритм действия программы изображен на схеме 1.





Многочлен $f(x) = x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 9x + 9$ на отрезке $[-4; 4]$ имеет 3 корня: $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 3$.

Работа программы:

введите нижнюю границу a= -4 напишите числитель 9 напишите знаменатель 1 a5 = 9.00 напишите числитель -9 напишите знаменатель 1 a4 = -9.00 напишите числитель 8 напишите знаменатель 1 a3 = 8. 00 напишите числитель -8 напишите знаменатель 1 a2 = -8.00 напишите числитель -1 напишите знаменатель 1 a1 = -1.00 напишите числитель 1 напишите знаменатель 1 a0 = 1.00 f0= -595 f1= 215.8 f2= -63.2 f3= 16.8 f4= -4.2 f5= 1 F0= -595.00 F1= 8965.64 F2= 368.80 F3= 16.80 F4= 0.84 F5= 1.00 k= 0 m= 4	введите верхнюю границу b= 4 напишите числитель 9 напишите знаменатель 1 a5 = 9.00 напишите числитель -9 напишите знаменатель 1 a4 = -9.00 напишите числитель 8 напишите знаменатель 1 a3 = 8.00 напишите числитель -8 напишите знаменатель 1 a2 = -8.00 напишите числитель -1 напишите знаменатель 1 a1 = -1.00 напишите числитель 1 напишите знаменатель 1 a0 = 1.00 f0= 357 f1= 139 f2= 45.6 f3= 13.6 f4= 3.8 f5= 1 F0= 357.00 F1= 3041.80 F2= 188.96 F3= 11.68 F4= 0.84 F5= 1.00 h= 5 v= 0
N+b-N+a = 5 N-a-N-b = 4 0<=количество действительных корней <= 4	

В итоге примерно за минуту мы получаем ответ, который с помощью исследования функции был бы получен путем долгих вычислений.

Рассмотрели еще один полином при помощи теоремы Ньютона-Сильвестра и с помощью другого метода, который описывается теоремой Штурма, и сравним результат. Эта теорема представлена в монографии А. Г. Куроша «Курс высшей алгебры» [2]. Получение оценок на основании теоремы Штурма подробно описано в курсовой работе автора.

Таблица 1

Сравнение оценок, полученных с помощью двух теорем

Рассмотренный многочлен	Полученный результат по теореме	
	Ньютона – Сильвестра	Штурма
$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 - x + 2$ (рис. 1)	≤ 2	2
$f(x) = x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 9x + 9$ (рис. 2)	≤ 4	3
$f(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 22x^2 - 63x + 36$ (рис. 3)	≤ 2	2

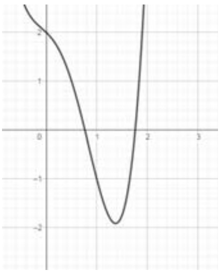


Рис. 1

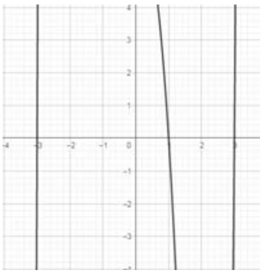


Рис. 2

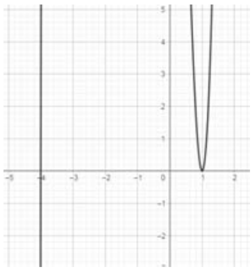


Рис. 3

Таким образом, перед школьником можно поставить следующие задачи:

- Рассмотреть применение теоремы Ньютона – Сильвестра для заданных многочленов различных степеней. Построить графические иллюстрации для различных случаев применения теоремы.
- Разработать алгоритм поиска числа корней на основании теоремы Ньютона – Сильвестра и реализовать алгоритм на каком-либо языке программирования.
- Выделить условия, при которых тот или иной метод оценки числа корней дает лучший результат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М. : Наука, 1965. 431 с.
2. Прасолов В. В. Многочлены. М. : МЦНМО, 2001. 336 с.

О. О. Дёмина
МБОУ СОШ № 42, г. Иркутск

ФОРМИРОВАНИЕ ЧИТАТЕЛЬСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В 5–6-х КЛАССАХ

На сегодняшний день структура школьного образования испытывает большие изменения в связи с запросом современного общества. Запрос общества к образованию-воспитание всесторонней личности, с развитыми способностями критического мышления, способностью анализировать, соотносить, интерпретировать информацию, полученную в разных формах, использовать творчески полученные знания, а также принимать нестандартные решения и делать выводы. Залог успешного образования – формирование и развитие функционально грамотной личности.

Современный функционально грамотный человек, умеющий применить математические знания в повседневной жизни, должен обладать способностями:

– умение решить проблему повседневной жизни при помощи знаний математических дисциплин,

– умение доказать теоретически обоснованность применения математических знаний и методов при решении вышеуказанных проблем,

– анализировать использованные методы решения,

– интерпретировать полученные математические результаты, в разрезе задачи из повседневной жизни.

Человек, обладающий способностью определять и понимать роль математических дисциплин в повседневной жизни, умеющий обосновать математические суждения и использовать знания математики так, чтобы удовлетворять в настоящем и будущем потребности, может быть отнесен к категории математически грамотных людей.

Учебники математики богаты разнообразными задачами технического характера, чего нельзя сказать о разнообразии задач практического содержания с комбинированной формой представления информации, а ведь практические задачи, представленные в виде текста, схемы, таблицы одновременно более сложные и трудоемкие для пятиклассников.

Множество практико-ориентированных задач включены в экзаменационный материал ОГЭ и ЕГЭ. Применение в построении учебной деятельности технологии критическое мышление, развивает функциональную грамотность обучающихся, применение методов и приемов данной технологии богато возможностями формирования данных навыков как в урочной, так и внеурочной деятельности.

Одним из важнейших навыков образования, является читательская грамотность, так как применение её повсеместно, в любой сфере жизни человека. Читательски грамотный человек способен успешно работать с разными видами работы с текстом: понимать, размышлять, оценивать полученную информацию, расширять свои знания и возможности, использовать её для достижения своих целей.

Развитие навыков читательской грамотности на уроках математики можно широко разнообразить, используя представления информации как в виде сплошного текста, так и в схемах, таблицах, чертежах, диаграммах, графиках и прочем.

Содержание заданий подобного рода непосредственно содержат основную тему программы школьного курса математики и применяются на разных этапах учебного занятия.

В связи с вышесказанным для формирования читательской грамотности на своих уроках математики в 5–6-х классах я применяю разные приемы работы с информацией, применение которых помогает формировать и совершенствовать навыки читательской грамотности. Подбираю задания разнообразного типа, выполнение которых требуют осмысления прочитанного и интерпретации полученных знаний в различные иные формы.

Рассмотрим пример заданий, связанных с анализом текста, направленных на формирование читательской грамотности при изучении новой темы «Десятичные дроби», на уроке математики в 5-м классе.

Карточка 1

Еж обыкновенный относится к виду млекопитающих. Семейство ежовых, евразийские ежи. Преобладающая территория обитания Европа. Ежи не заселяются в болотах и хвойных местностях, они живут на полянках и опушках у рек. Это ночное животное. Питаются предпочтительно червями, мышами, гусеницами и т. п.

Рис. 1. Ёж обыкновенный

Карточка 2

Меж тем Руслан далеко мчится;
В глуши лесов, в глуши полей
Привычной думою стремится
К Людмиле, радости своей,
И говорит: «Найду ли друга?
Где ты, души моей супруга?
Увижу ль я твой светлый взор?
Услышу ль нежный разговор?
Иль суждено, чтоб чародея
Ты вечной пленницей была
И, скорбной девою старея,
В темнице мрачной отцвела?

Рис. 2. Иллюстрация к произведению А. С. Пушкина «Руслан и Людмила»

Карточка 3

В процессе деления целых предметов на несколько частей, возникли в связи дроби. При делении целых объектов на разное количество частей, образовывались дроби имеющие разные знаменатели. В Древнем Египте вычисления с дробями имеющих разные знаменатели проводили только жрецы, так как это был сложный и трудоёмкий процесс.

Примерно 500 лет назад Стевин Симон математик из Голландии, открыл запись дробей со знаменателями 10, 100, 1000 и т д. в «новой» форме. Так появилось два понятия «новые» и «старые» дроби, которые позже стали называться «десятичные» и «обыкновенные» соответственно.

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде в виде десятичной дроби.

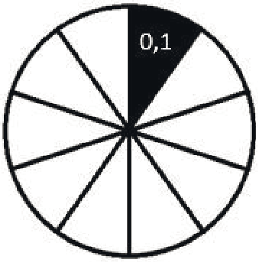


Рис.3. Представление дроби $\frac{1}{10}$ или 0,1 в виде диаграммы.

Десятичные дроби читают с обязательным указанием целых единиц, где целая часть отделяется от дробной части запятой. В десятичной дроби после запятой ставят столько же цифр, сколько нулей в знаменателе соответствующей ей обыкновенной дроби. Любую десятичную дробь легко записать в виде обыкновенной дроби:

Обыкновенные дроби	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{23}{100}$	$\frac{1234}{1000}$
Десятичные дроби	0,1	0,03	0,23	1,234

Десятичные дроби записывают аналогично записи натуральных многозначных чисел:

Сотни	Десятки	Единицы	,	Десятые	Сотые	Тысячные
	2	3	,	0	7	6

Задания 1

1. Постарайтесь внимательно прочитать текст и ответить на вопросы:
- Какая главная мысль предложенного вам текста?
- К какому учебному предмету вы отнесли бы данный текст?

- Определите тип текста?
- Назовите основные отличия данных текстов?

Задания 2

- Как бы вы озаглавили текст, относящийся к предметной области «Математика»?
- Составьте план данного текста.

Ответьте на вопросы:

1. Какая потребность человечества повлекла появления дроби?
2. Кто первооткрыватель дробей, в знаменателе которых находится степень 10?
3. Как изначально называли «обыкновенные» и «десятичные» дроби?
4. Как читаются десятичные дроби читают в сравнении с обыкновенными?
5. Как в письменной записи десятичной дроби отделяют целую часть от дробной части?
6. Любую ли, что любую обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной?

Работая с подобными заданиями педагогу удается организовать деятельность самостоятельной. Формируются у обучающихся умение проводить анализ текстовой информации, умение определять главные и второстепенные данные, развивается способность рассуждения, аргументирования своей точки зрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалева Г. С. Читательская грамотность : сб. эталон. заданий. Вып 1 : в 2 ч. М. : Просвещение, 2022.
2. Епишева О. Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода. М. : Просвещение, 2003. 2.
3. Формирование учебной деятельности школьников / под ред. В. В. Давыдова [и др.]. М. : Просвещение, 1982. 216 с.

З. А. Дулатова, А. И. Ковыршина
Е. С. Лапшина, Н. Н. Штыков
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ РЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 7–8-х КЛАССОВ

В рамках комплекса олимпиад «Созвездие Байкала» была проведена региональная олимпиада по математике для обучающихся 7–8-х классов. Олимпиада состояла из двух туров, на каждом из которых требовалось выполнить 5 заданий (решить задачи по алгебре, геометрии, теории чисел, комбинаторике и другим разделам школьного курса математики). Ни один участник не решил все задачи. Каждая задача была решена хотя бы одним участником. Ожидаемо, самыми сложными заданиями стали задачи 7.10 и 8.10 (выполнил 1 участник в каждом классе).

Приведем условия и решения заданий олимпиады 7-го класса.

7.1. Натуральное число a является делителем натурального числа n. Найдите все возможные значения n, для которых $n - 3a = 97$.

Решение. Так как a является делителем натурального числа n, то существует целое число q, что $n = aq$. Найдем n из уравнения $aq - 3a = 97$. Выражение, стоящее в левой части, представим в виде произведения двух множителей. Так как в правой части рассматриваемого уравнения стоит простое число, то согласно основной теореме арифметики, равенство $a(q-3) = 1 \cdot 97 = 97 \cdot 1$ возможно в случае $a = 1, q - 3 = 97$ или $a = 97, q - 3 = 1$. Соответственно, $n = 1 \cdot 100 = 100$ или $n = 97 \cdot 4 = 388$.

Ответ. $n \in \{100, 388\}$.

7.2. Двузначное число a такое, что умножая это число на 2 и вычитая затем из $2a$ натуральное число от 1 до 10, а затем повторяя эти действия (умножение на 2 и вычитание числа от 1 до 10) несколько раз, можно получить число 2023. Можно ли из числа a такими же действиями получить число 2024?

Решение. Анализ с конца. Число 2023 могли получить из четного числа вычитанием нечетного 1, 3, 5, 7 или 9. Для того чтобы получить число 2024, будем вычитать на единицу меньше. Это возможно в случаях, когда не вычитали 1, так как нуль не входит во множество возможных значений вычитаемого. Если же 2023 было получено из 2024, то далее вычитанием числа от 1 до 10 получить 2024 нельзя. Сделаем еще один шаг назад. Число 2024 получили в результате удвоения числа 1012, которое в свою очередь, как четное число могло быть получено из четного после вычитания 2, 4, 6, 8 или 10. Если теперь будем вычитать на единицу меньше, то в результате будет число 1013. Далее, умножая 1013 на 2 и вычитая 2, получим 2024.

Ответ. Да.

7.3. Все натуральные числа разбиты на два непустых подмножества. Всегда ли найдутся три числа a, b, c (не обязательно различные) из одного множества, сумма которых находится в том же множестве?

Решение. От противного. Предположим, что при любом разбиении всех натуральных чисел на два подмножества A и B, для любых трех (не обязательно различных) чисел из одного подмножества, сумма этих трех чисел будет в другом подмножестве. Так как $3 = 1 + 1 + 1$, то числа 1 и 3 будут в разных подмножествах. Допустим, что $1 \in A, 3 \in B$. Заметим, что 2 и $6 = 2 + 2 + 2$ также в разных подмножествах.

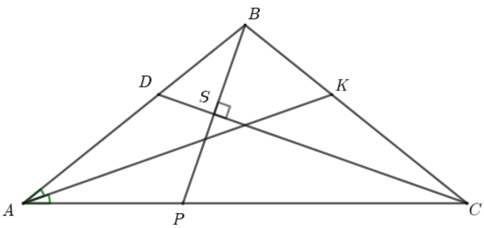
Случай 1. Если 2 находится в подмножестве A, тогда $6 \in B$.

Так как $18 = 6 + 6 + 6$, то $18 \in A$, а $5 = 2 + 2 + 1$, то $5 \in B$. Аналогично из того, что $15 = 5 + 5 + 5$, заключаем, что $15 \in A$. Так как 1, 2 и 15 из одного подмножества, то их сумма $18 \in B$. Противоречие с условием $18 \in A$.

Случай 2. Если 2 находится в подмножестве B, тогда $6 \in A$. Так как $8 = 1 + +1 + 6$, то $8 \in B$. С другой стороны, $8 = 2 + 3 + 3$, следовательно, $8 \in A$. Противоречие.

Ответ. Да.

7.4. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ отмечена точка P так, что $BC = CP$. Точка K на стороне BC такая, что $\angle BAK = \angle CAK$. Существует ли треугольник, две стороны которого равны BK, а третья сторона равна BP?



Решение. Проведем CD перпендикулярно BP. Так как $BC = CP$, то высота CS равнобедренного треугольника BCP является медианой и биссектрисой. Следовательно, $\angle BCD = \angle BAK$. Треугольники BCD и BAK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, а значит, $BD = BK$. Так как треугольник DSB – прямоугольный, то $BD > BS$ и $BK > BS$. Сторона $BS = \frac{1}{2}BP$, поэтому $2BK > BP$. Неравенство треугольника для BK, BK, BP выполняется. Треугольник существует.

Ответ. Да.

7.5. Есть набор из 118 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 118 (каждое число написано один раз). Оля выбирает 60 карточек и отдает их Ане, а остальные 58 карточек оставляет у себя. Аня выбирает из 60 карточек две и передает их Оле, которая добавляет к этим двум карточкам одну из своих 58 карточек. Затем Оля передает эти три карточки Лене. Может ли Лена, предварительно договорившись с Аней, всегда определить, какую карточку добавила Оля?

Решение. Лена с Аней все числа от 1 до 118 разбивают на пары так, что сумма чисел в каждой паре равна 119. Всего пар 59. Оля передает 60 карточек, а значит, среди чисел, написанных на них, есть хотя бы два числа, состоящие в паре. Карточки с этими числами Аня выбирает и передает их Оле. Какую бы карточку не добавила Оля, Лена всегда сможет ее определить, так как число, записанное на ней, ни с одним из двух чисел, представленных на других карточках, в сумме не даст 119.

Ответ. Да.

7.6. Натуральное число n, не содержащее цифры 0 такое, что в десятичной записи произведение его цифр и самого числа n равно 1716. Найдите все возможные значения n.

Решение. Из канонического разложения числа $1716 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$ следует, что n делится на 11 и 13, т. е. $n = 143 \cdot q$. Заметим, что произведение цифр 1716 не равно 1, а значит, $q \neq 12$. Таким образом, $1716 = 143 \cdot q \cdot t$, где $q \in \{1,2,3,4,6\}$. При этом значение $t = \frac{12}{q}$ должно быть равно произведению цифр числа n.

При $q = 1, t = 12$ – есть произведение цифр числа $n = 143$. Нетрудно проверить, что при остальных значениях q значения t отличны от произведения цифр числа n. Например, при $q = 2$, $t = 6$ – не равно произведению цифр числа 286.

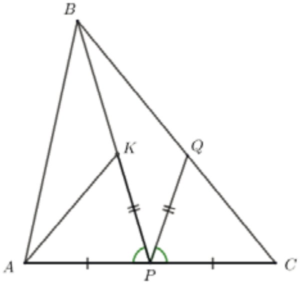
Ответ. 143.

7.7. Из 1498 шариков желтого и черного цветов образовали 749 пар так, что ровно половина желтых шариков оказалась в парах в парах с черными шариками. Можно ли по-другому разложить эти шарики в 749 пар так, что ровно половина черных шариков окажется в парах с желтыми шариками?

Решение. Количество желтых шариков – четное, так как половина из них в парах с черными. Пусть $2k$ – число желтых шариков. Тогда k желтых шариков в парах с черными, а другие k желтых шариков разложены в пары между собой. Пар желтых шариков $\frac{k}{2}$, а значит, k – четное число и $2k \vdots 4$. Если надо такую же процедуру проделать с черными шариками, то и их количество должно делиться на 4. Но тогда и число всех шариков должно быть кратным 4. Однако 1498 не делится на 4.

Ответ. Нельзя.

7.8. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = CP$, $\angle BPA = \angle QPC$. Также $CQ + QP = BP$. Докажите, что $\angle ACB + \angle ABP = \angle BAC$.



Решение. Отметим на стороне BP точку K, так чтобы $QP = KP$. Тогда треугольники AKP и CQP равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle KAP = \angle QCP$ и $CQ = AK$. По условию $BP = CQ + QP$, но с другой стороны, $BP = KP + KB$, $KP = QP$, поэтому $CQ = KP$. Но $CQ = AK$, а значит, треугольник AKB – равнобедренный и $\angle BAK = \angle ABK$. Таким образом, $\angle BAC = \angle BAK + \angle KAP = \angle ABP + \angle ACB$.

7.9. Существует ли такое натуральное число n, что для двух его различных простых делителей p и q числа $n - p$ и $n - q$ являются квадратами целых чисел?

Решение. Из условия $\begin{cases} n - p = k^2 \\ n - q = t^2 \end{cases}$, так как $n \vdots p$ и $n \vdots q$ следует, что $k^2 \vdots p$ и $t^2 \vdots q$. В силу простоты p и q, имеем, что $k \vdots p$ и $t \vdots q$. Будем считать, k и t – натуральные числа, тогда существуют натуральные k_1 и t_1, что $k = pk_1$ и $t = qt_1$. Предположим, что $q > p$. Вычитаем из первого уравнения системы второе уравнение, получаем $q - p = (k - t)(k + t) = (k - t)(pk_1 + qt_1)$. В силу того, что $0 < q - p < pk_1 + qt_1$, последнее равенство невозможно.

Ответ. Нет.

7.10. Числа x, y, z таковы, что $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$. Докажите неравенство $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| + \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right| \leq x + y + z$.

Решение. Так как неравенство симметрическое, можно считать, что $x \geq y \geq z$. Тогда $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z}$ и доказываемое неравенство запишется в виде

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \leq x + y + z,$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \leq x + y + z,$$

Разность правой и левой частей неравенства равна:

$$x + y + z - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y - \frac{1}{y}\right) + \left(z - \frac{1}{z}\right) - \frac{2}{z}.$$

Заметим, что $y - \frac{1}{y} = \frac{(y-1)(y+1)}{y} \geq 0$ при $y \geq 1$. Аналогично, $z - \frac{1}{z} \geq 0$ при $z \geq 1$. Известно, что сумма двух взаимно обратных положительных не меньше 2, а значит $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Следовательно,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y - \frac{1}{y}\right) + \left(z - \frac{1}{z}\right) - \frac{2}{z} \geq 2 - \frac{2}{z} \geq \frac{2(z-1)}{z} \geq 0, \text{ при } z \geq 1.$$

Неравенство доказано.

Далее приведем условия и решения заданий олимпиады 8-го класса.

8.1. В 56 ящиках находятся 102 шарика 10 различных цветов, причем нет пустых ящиков. Всегда ли найдутся два ящика, в которых цвета шариков одинаковые?

Решение. Пусть k – количество ящиков, в которых по одному шарику. Если $k \geq 11$ ящиков, то найдутся два ящика, в которых шарики одного цвета. Если $k \leq 10$, то в $56 - k$ ящиках хотя бы по два шарика. Тогда $2(56 - k) + k \leq 102$, $k \geq 10$. Значит, $k = 10$ и в 46 ящиках ровно по 2 шарика. Так количество способов выбрать различные пары шариков 10 цветов, в которых цвета шариков разные, равно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$, то две пары шариков с одинаковыми наборами цветов. Если в какой-то паре шарики будут одного цвета, то по цвету шарики этой пары совпадут с одним из шариков в 10 ящиках по одному шарику.

Ответ. Да.

8.2. Написали 10 последовательных целых чисел $k, k + 1, k + 2, \ldots, k + 9$. Можно вычеркнуть одно из чисел так, чтобы сумма остальных чисел была равна s^2, где s – целое число. Какое наибольшее количество различных чисел можно вычеркнуть, чтобы сумма оставшихся 9 чисел была равна квадрату целого числа?

Решение. Сумма десяти написанных чисел равна $10k + 45$, и среди них есть числа $s^2, (s+1)^2, \ldots, (s + n)^2$, для $s \geq 0$. Так как $(s + n)^2 \leq 9k + 45$, $s^2 \geq 9k + 36$, то $n^2 + 2sn \leq 9$, $n \leq 3$. Значит, больше четырех квадратов получить нельзя. Для набора чисел $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ можно получить числа $0, 1, 2^2, 3^2$, вычеркивая соответственно числа $5, 4, 1, -4$.

Ответ. 4.

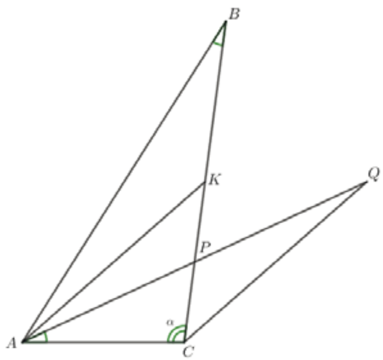
8.3. Аня, Лена, Оля и Маша по очереди ставят по две фишки на две клетки на доске 60×103 клеток (60 строк, 103 столбца). Сначала Аня ставит фишки на две соседних в столбце клетки, затем Лена ставит фишки на две соседних в столбце клетки. Затем Оля ставит фишки на две соседних в строке клетки, а затем Маша ставит фишки на две соседних в строке клетки. После этого ходы повторяются в той же последовательности (Аня, Лена, Оля и Маша). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Могут ли Аня, Лена и Маша договориться между собой и играть так, чтобы Оля проиграла?

Решение. Разделим доску на вертикальные прямоугольники 2×1. Назовем эти прямоугольники выделенными. Аня и Лена будут ставить свои фишки в клетки прямоугольников 2×1 так, что после их ходов четыре фишки будут размещены в двух выделенных вертикальных прямоугольниках. После размещения фишек Олей Маша ставит свои фишки так, чтобы вместе с Олиными фишками они размещались в двух выделенных прямоугольниках 2×1. Тогда перед каждым ходом Оли фишки будут находиться только в выделенных прямоугольниках. Количество таких прямоугольников кратно двум, но не кратно четырем. А всего прямоугольников 2×1 на доске $30 \cdot 103$. Это число делится на 2, но не делится на 4. Значит, в какой-то момент после хода Лены не останется свободных клеток.

Ответ. Да.

8.4. На стороне BC треугольника ABC, у которого $BC = 2AC$, отмечена точка P так, что $\angle CAP = \angle CBA$. На луче AP отмечена точка Q так, что $2\angle BCQ = \angle BAC + \angle ABC$. Найдите $\frac{AB}{AQ}$.

Решение. Пусть $\angle ACB = \alpha$. Тогда $\angle BCQ = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\angle ACQ = \angle ACB + \angle BCQ = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Отметим середину стороны BC, точку K. Так как $BK = KC = AC$, то $\angle CAK = \angle CKA = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\angle BKA = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Тогда треугольники AKB и QCA равны, так как $KB = AC$, $\angle CAQ = \angle KBA$, $\angle BKA = \angle ACQ$. Значит, $AB = QA$.



Ответ. 1.

8.5. Составное число n такое, что если написать его делители в порядке возрастания, начиная с 1, то каждый последующий делитель будет больше предыдущего на одно и то же число k, а все делители, кроме 1 и последнего написанного делителя (последний написанный делитель – первое составное число, после него делители уже не записываются) – простые числа. Найдите все возможные значения k.

Решение. Пусть p – наименьший простой делитель числа n. Тогда $k = p - 1$, и среди делителей $1, k+1, 2k+1, \ldots$ нет делителя $(k-1)^2 = (p-2)^2$, так как у этого числа все простые делители меньше p. Это значит, что $k < 3$. Для $n = 12$ есть подходящая последовательность при $k = 1$: 1, 2, 3, 4, а для $n = 315$ есть последовательность при $k = 2$: 1, 3, 5, 7, 9.

Ответ. 1 и 2.

8.6. Найдутся ли натуральные числа a и b такие, что $a > 100$, $b > 100$ и НОК $(a, a+b)$ = НОК $(a, a+4b)$?

Решение. Например, $a = 200, b = 400$. Можно доказать, что решения уравнения имеют вид $a = 2b$.

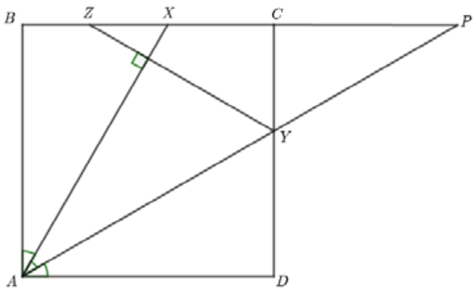
Ответ. Да.

8.7. Докажите, что если $3 \leq a \leq 4$, $3 \leq b \leq 4$, то

$$(4 - a)^2 + (4 - b)^2 + (a - b)^2 \le 2.$$

Решение. Пусть $t = a - 3$, $s = b - 3$, $t \ge s$. Тогда нужно доказать неравенство $(1 - t)^2 + (1 - s)^2 + (t - s)^2 \le 2$ для $0 \le t \le 1$, $0 \le s \le 1$. Так как $x^2 \le x$ для $0 \le x \le 1$, то $(1-t)^2 + (1-s)^2 + (t-s)^2 \le 2 - 2s \le 2$.

8.8. На стороне BC квадрата $ABCD$ отмечена точка X, на стороне CD – точка Y, а на отрезке BX – точка Z так, что $2BX = AX$ и $2DY = AY$, а также прямые YZ и AX перпендикулярны. Докажите, что $CZ + CY = AX$.



Решение. В прямоугольных треугольниках ABX и ADY $\angle BAX = \angle DAY = 30°$. Значит, эти треугольники равны и $CX = CY$. Пусть прямые AY и BC пересекаются в точке P. Так как $\angle XAP = 30°$, а $\angle DAY = \angle XPA$, то $AX = XP = CX + CP = CY + CP$. Докажем, что $CP = CZ$. Так как AX и YZ перпендикулярны, то $\angle YZP = 30°$ и треугольник YZP – равнобедренный, в котором YC – высота. Тогда $CP = CZ$.

8.9. К большому куску сыра пришли 2916 мышей. Сыр они едят строго по очереди. Первая мышь съела $\frac{1}{2916}$ часть сыра, вторая мышь съела $\frac{2}{2916}$ от оставшейся части, третья мышь съела $\frac{3}{2916}$ от оставшейся после первых двух мышей части сыра и так далее, пока последняя мышь не съест весь оставшийся сыр. Какая по счету мышь съест самый большой кусок сыра?

Решение. Сравним съеденные части сыра -й и $(k+1)$-й мышами. Пусть к приходу -й мыши остался кусок сыра величиной s. Тогда эта мышь съест $\frac{ks}{2916}$ часть, а $(k+1)$-я мышь съест $\frac{k+1}{2916}\left(s - \frac{ks}{2916}\right)$. Отношение частей, съеденных $(k+1)$-й и k-й мышами $\frac{2916k + 2916 - k^2 - k}{2916k} = 1 - \frac{k^2 + k - 2916}{2916k}$. При $k = 54$ это отношение становится впервые меньше 1 (а затем каждая последующая мышь съела меньше предыдущей), т. е. 54-я мышь съела больше сыра, чем остальные мыши.

Ответ. 54.

8.10. В регионе 99 городов, каждый из которых соединен дорогами с другими городами региона, количество которых больше 80, но меньше 91. Всегда ли найдутся 10 городов в этом регионе из которых выходит одинаковое число дорог, таких, что для этих 10 городов есть город, соединенным с каждым из них дорогой?

Решение. Рассмотрим город A, из которого выходит $n \ge 82$ дорог (так как не может быть 99 городов, из каждого из которых выходит по 81 дороге). Пусть с городом A дорогами соединены города с 81, 82, …, 89 дорогами. Тогда с A из каждой группы соединены дорогами не более 9 городов. Значит, всего с A соединены не более 81 города. Противоречие. Значит, есть города из которых выходит 90 дорог. Пусть B – один из таких городов. Тогда с городами каждой группы (81, 82, …, 89) он соединен ровно 9 дорогами. Теперь рассмотрим группу X из города B и девяти городов из группы городов с 90 дорогами. Если из остальных 89 городов к городам группы X выходит не более 9 дорог, то всего дорог, соединяющих группу городов X и остальные 89 городов, не более 801. С другой стороны, из городов группы X к остальным городам выходит не менее $10 \cdot 90 - 45 = 855$ дорог. Значит, из 89 городов найдется город, соединенных с каждым из городов группы X дорогами.

Ответ. Да.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмина Н. Д., Ковыршина А. И., Лапшина Е. С. Элементы теории чисел в школе и вузе : учеб. пособие. Иркутск : Аспринт, 2017. 132 с.

2. Штыков Н. Н., Лапшина Е. С., Ковыршина А. И. Внеурочная деятельность по математике. Ч. 1 : учеб. пособие. Иркутск : Аспринт, 2018. 108 с.

О. В. Ермакова, Т. А. Петрова
МБОУ СОШ «Новая Эра», г. Тулун

ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ КАК ИНСТРУМЕНТ ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ

Математике должно учить в школе ещё с той целью, чтобы познания здесь приобретаемые, были достаточными для обыкновенных потребностей жизни.
Н. И. Лобачевский

Трудно утверждать, что в современном образовании нет проблем. Ни для кого ни секрет, что даже самый успешный ученик в школе может не иметь такой же успех за ее пределами. Огромный багаж знаний не является ключом успешной жизни. Опыт показывает, что предметная модель образования, ориентированная на знания, неэффективна. Перед школой стоит задача – совершенствование качества образования посредством формирования функциональной грамотности.

Раскроем понятие «функциональная грамотность». В первую очередь это умение использовать знания в различных жизненных ситуациях, в том числе разнообразных сферах деятельности [1, с. 10–15]. Известный психолог и лингвист А. А. Леонтьев раскрыл это определение следующим образом: «Функционально грамотный человек – это человек, который способен использовать все постоянно приобретаемые в течение жизни знания, умения и навыки для решения максимально широкого диапазона жизненных задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений» [2].

Вступая во взрослую жизнь, ребенок должен понимать, что общество нуждается в таких специалистах. Следует отметить, что сегодня запросы экономики и общества на функционально грамотных специалистов, т. е. на таких специалистов, которые способны к образованию и применению новых знаний в нестандартных ситуациях. К молодым специалистам предъявляются такие требования как творчество, самостоятельность, ответственность, коммуникабельность, потребность в новых знаниях, умение находить и обрабатывать новую информацию.

Поэтому современной школе важно создавать новые отличающиеся от традиционных подходов к образованию. Одним из таких инструментов являются практико-ориентированные задания – задачи, с которыми человек может столкнуться в повседневной жизни. Решая такие задания, обучающиеся получают практические навыки, в том числе первые профессиональные знания.

Практико-ориентированные задания можно *классифицировать* по разному: по предметной области, по цели, по содержанию, по количеству учащихся, по месту выполнения, по времени выполнения, по носителю информации, по уровню самостоятельности, по этапам использования на уроке. Существуют и другие подходы к классификации, например, задания, связанные с жизнью: правила содержания домашних животных, вычисления расстояния и скорости движения, заполнение разнообразных документов, определение семейного бюджета, составление меню.

Выделяют несколько основных видов функциональной грамотности, среди которых – математическая грамотность. Она заключается в умении ребенка применять знания, полученные на уроках математики в обычной повседневной жизни, в различных ситуациях, связанных с личной и школьной жизни, общественной жизнью, работой и отдыхом. Выпускник должен уметь оперировать математическими понятиями, фактами, инструментами для описания, объяснения явлений. Такой ребенок может обычные задачи из жизни решать с помощью математических методов, формулировать, анализировать и записывать. Важно умение производить обратный перевод результата, полученного в результате математических вычислений, с математического языка на язык решаемой задачи.

Существуют разнообразные типы задач, направленные на формирование математической грамотности:

1. Общественная жизнь – исследование динамики социальных запросов, прогнозы, экология, демография. *Задача*. В магазине продается бумага формата А4 в пачках по 200 листов. Сколько таких пачек нужно купить Тамаре Ивановне, если она расходует в месяц 150 листов, а планирует работать 3 месяца.

2. Повседневные дела – приготовление еды, покупки, здоровье, оплата счетов, планирование отпуска. *Задача*. Максиму Алексеевичу доктор назначил следующий план приема таблеток: 2 таблетки 3 раза в день на 14 дней. Эти таблетки продается в упаковках по 10 штук. Сколько упаковок нужно купить Максиму Алексеевичу, чтобы хватило на весь курс лечения?

3. Наука – работа с формулами. *Задача*. Телефон LG в магазине «Эльдорадо» стоит 15 200 руб, что составляет 40 % от стоимости ноутбука той же марки. Определите стоимость ноутбука.

4. Трудовая деятельность – подсчеты и измерения. *Задача*. Сколько банок краски по 2 кг необходимо купить Николаю, чтобы покрасить ворота в гараж высотой 3 м и шириной 5 м, если расход краски по металлу составляет 150 г на 1 $м^2$?

Практико-ориентированные задания можно брать из базы задач ОГЭ, готовых сборников или иных открытых интернет-источников. А также педагог может составлять их сам или конструировать новые задачи из тех, что есть в ученике. Для развития математической грамотности можно применять задания:

- **творческого характера** (использование различных легенд, сказок, исторических фактов);
- **исследовательского характера** (например, вычислить площадь земельного участка по формуле Пика, используя карту местности). Такая работа была выполнена ученицей 5-го класса. «Выполняя задания по географии на контурных картах, я обратила внимание на то, что любую территорию можно легко представить в виде многоугольника. А значит, и посчитать площадь любого земельного участка (огорода, города, области, страны и т. д.) можно используя

формулу Пика. Для этого искомый земельный участок необходимо перенести на клетчатую бумагу. Для примера я выбрала земельный участок, занимаемый МБОУ СОШ «Новая ЭРА». Для этого было несколько причин: земельный участок имеет границы, установленные в соответствии с действующим законодательством Российской Федерации; поставлен на кадастровый учет; имеет сложную форму; знаком всем жителям нашего города; самое главное, это моя школа.

Скачав земельный участок со спутниковой карты в масштабе М 1:100 (приложение 5), я наложила на него решетку (приложение 6) и, используя формулу Пика, вычислила площадь земельного участка: Г = 212, В = 36, S = 212 + 36/2 – 1 = 229 м^2. Сторона клетки была принята за 10 м. Значит, площадь клетки равна $10 \cdot 10 = 100$ м^2. Отсюда, площадь искомого земельного участка равна 229·100 = 22 900 м^2. Сравним полученную площадь со сведениями, содержащимися на сайте Росреестра. Фактическая площадь земельного участка равна 22815,9 м^2. **Вывод:** используя формулу Пика можно вычислить по карте площадь любой местности, погрешность вычислений получается минимальная. Погрешность получилась минимальная, следовательно, по формуле Пика легко и удобно по карте можно сосчитать площадь любой местности».

Повышает результативность использования практико-ориентированных задание использование на уроках активных и интерактивных методов обучения, организация парной и групповой работы, использование электронных носителей или раздаточных материалов, таблиц, рисунков. Все это в комплексе обеспечивает результативность обучения, достижение поставленных целей в формировании универсальных учебных действий, повышает интерес обучающихся к изучаемому предмету.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеева Е. Е. Методика формирования функциональной грамотности учащихся в обучении математике // Проблемы современного педагогического образования. 2020. № 66-2. С. 10–15.
2. Формирование функциональной грамотности на уроках русского языка. URL: https://rosuchebnik.ru/material/formirovanie-funktsionalnoy-gramotnosti-na-urokakh-russkogo-yazyka-article/
3. Савенко В. А. Формирование функциональной грамотности обучающихся на уроках математики. URL: https://педталант.рф/wp-content/uploads/2023/01
4. Шаховал Т. В. Использование практико-ориентированного подхода в обучении математике: метод. рекомендации. Южно-Сахалинск : Изд-во ИРОСО, 2020. 24 с.
5. Арапов К. А., Рахматуллина Г. Г. Проблемное обучение как средство развития интеллектуальной сферы школьников // Молодой ученый. 2012. № 8 (43). С. 290–294. URL: https://moluch. ru/archive/43/4806
6. Щур А. Из опыта работы с одаренными детьми // Учитель. 2015. № 3. С. 37–40.

Е. Э. Зыкова
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАЗНЫМИ СПОСОБАМИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ОГЭ И ЕГЭ

Для школьников геометрия является одним из сложнейших предметов, так как для решения требуется знать много определений и теорем, иметь пространственное воображение, выполнять чертежи. Если в ОГЭ на геометрию приходится почти половина заданий как в первой, так и второй части экзамена, то в ЕГЭ из 18 только 4 задания. Интерес у обучающихся к предмету теряется, что приводит к низким результатам на экзамене по геометрии.

В данной статье рассмотрим несколько способов решения одной из задач № 25 из банка ОГЭ. Такой подход к решению задач и подготовке к экзамену в целом, может заинтересовать учеников, каждый может выбрать свой более ему понятный способ решения.

Задача. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AM перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 16. Найдите стороны треугольника ABC.

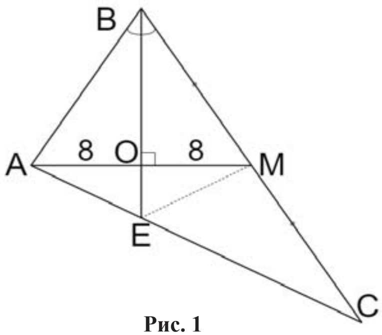


Рис. 1

Решение 1. Метод площадей

Дано: ΔABC, BE – биссектриса, AM – медиана $BE = AM = 16$, $BE \perp AM$ (рис. 1).

Найти: AB, BC, AC.

1) ΔABM – равнобедренный, так как BO – биссектриса и высота, следовательно, AB = BM.

AM медиана в $\Delta ABC \Rightarrow BM = MC$

$AB = BM = MC \Longrightarrow BC = 2AB$.

2) По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$

$AC = 3AE$.

3) $S_{ABE} = S_{MBE} = \frac{1}{2} AO \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = 64$.

4) EM медиана $\Delta BEC \Longrightarrow S_{EBM} = S_{EMC} = 64$.

5) $S_{ABC} = S_{ABE} + S_{EBM} + S_{EMC} = 64 \cdot 3 = 192$

6) AM медиана $\Delta ABC \Longrightarrow S_{ABM} = S_{AMC} = \frac{S_{ABC}}{2} = 96$.

7) $S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BO \Longrightarrow 96 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot BO \Longrightarrow BO = 12 \Longrightarrow$ $OE = 16 - 12 = 4$.

8) По теореме Пифагора в ΔABO находим $AB = \sqrt{12^2 + 8^2} = 4\sqrt{13}$

$$\Longrightarrow BC = 2AB = 8\sqrt{13}.$$

По теореме Пифагора в ΔAOE находим $AE = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$

$$\Longrightarrow\ AC = 3AE = 12\sqrt{5}$$

Ответ: $AB = 4\sqrt{13}, BC = 8\sqrt{13}, AC = 12\sqrt{5}$.

Решение 2. С помощью теоремы косинусов

1)–2) Из решения № 1 $BC = 2AB$, $AC = 3AE$.

Пусть $AB = c \Longrightarrow\ BC = 2c$, $\angle ABE = \angle EBC = \beta$ (рис. 2).

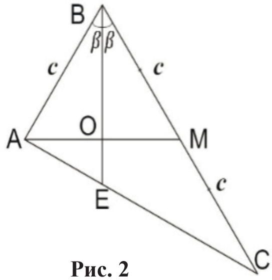


Рис. 2

3) В ΔABE по теореме косинусов выразим AE

$$AE^2 = c^2 + 16^2 - 2 \cdot c \cdot 16 \cdot \cos\beta = $$
$$= c^2 + 256 - 32 \cdot c \cdot \cos\beta$$

4) В ΔEBC по теореме косинусов выразим EC

$$EC^2 = 16^2 + (2c)^2 - 2 \cdot 16 \cdot 2c \cdot \cos\beta$$
$$= 256 + 4c^2 - 64 \cdot c \cdot \cos\beta$$

5) Так как $2AE = EC\ \Longrightarrow\ 4AE^2 = EC^2$

$$4(c^2 + 256 - 32 \cdot c \cdot \cos\beta) = 256 + 4c^2 - 64 \cdot c \cdot \cos\beta\ \Longrightarrow \cos\beta = \frac{12}{c}.$$

6) Выразим $\cos\beta$ из ΔABO $\cos\beta = \frac{BO}{c}\ \Longrightarrow\ \frac{BO}{c} = \frac{12}{c}\ \Longrightarrow$

$$BO = 12\ \Longrightarrow OE = 4$$

7) пункт 8) из решения № 1

Ответ: $AB = 4\sqrt{13}, BC = 8\sqrt{13}, AC = 12\sqrt{5}$

Решение 3. Аналитический способ

1)-2) Из решения № 1 $BC = 2AB$, $AC = 3AE$.

3) $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}\ \Rightarrow\ \frac{a}{2a} = \frac{b}{2b}$ см. рис. 3

4) В ΔABC выразим медиану AM и высоту BE:

$$AM^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$$

$$\Longrightarrow 16^2 = \frac{2a^2 + 2 \cdot 9b^2 - 4a^2}{4}\ \Longrightarrow$$

$$16^2 \cdot 2 = a^2 + 9b^2 - 2a^2$$

$$\Longrightarrow\ 9b^2 - a^2 = 512$$

$BE^2 = AB \cdot BC - AE \cdot CE\ \Longrightarrow\ 16^2 = a \cdot 2a - b \cdot 2b \Longrightarrow\ 16^2 = 2a^2 - 2b^2$

$$\Longrightarrow a^2 - b^2 = 16 \cdot 8 = 128$$

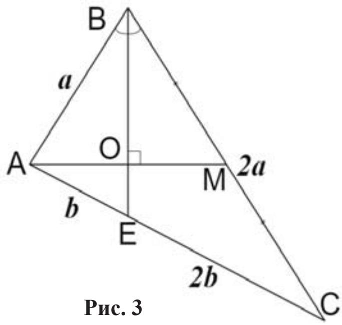


Рис. 3

$$\begin{cases} 9b^2 - a^2 = 512 \\ a^2 - b^2 = 128 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = 4\sqrt{5} \\ a = 4\sqrt{13} \end{cases}.$$

5) Получаем $AB = a = 4\sqrt{13} \Longrightarrow\ BC = 2AB = 8\sqrt{13}$

$AE = b = 4\sqrt{5}\ \Longrightarrow\ AC = 3AE = 12\sqrt{5}$

Ответ: $AB = 4\sqrt{13}, BC = 8\sqrt{13}, AC = 12\sqrt{5}$

Решение 4. Векторный способ

1)–2) Из решения 1 BC = 2AB, AC = 3AE.

3) Выразим векторы $\overline{BE}$ и $\overline{A}$M см. рис.

$$\overline{BE}=\overline{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AC}}=\bar{a}+\frac{1}{3}(\bar{c}-\bar{a})=\frac{2}{3}\bar{a}+\frac{1}{3}\bar{c}$$

$$\overline{A\mathrm{M}}=\overline{\mathrm{BM}}-\overline{AB}=\frac{1}{2}\bar{c}-\bar{a}$$

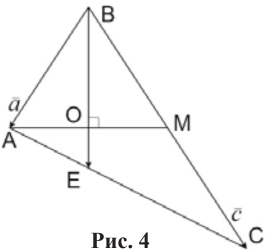


Рис. 4

4) Обозначим длину вектора $|\bar{a}|=a\Rightarrow|\bar{c}|=2a$

5) Найдём скалярный квадрат векторов $\overline{BE}$ и $\overline{A}$M :

$$|\overline{BE}|^2=16^2\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\bar{a}+\frac{1}{3}\bar{c}\right)^2=\frac{4}{9}\ |\bar{a}|^2+\frac{1}{9}\ |\bar{c}|^2+\frac{4}{9}\bar{a}\bar{c}=16^2$$

$$\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9}\cdot4a^2+\frac{4}{9}\bar{a}\bar{c}=16^2\Rightarrow\frac{8a^2}{9}+\frac{4\bar{a}\bar{c}}{9}=16^2\Rightarrow$$

$$2a^2+\bar{a}\bar{c}=576$$

$$|\overline{AD}|^2=16^2\Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\bar{c}^2-\bar{a}\right)^2=\frac{1}{4}\bar{c}^2-\bar{a}\bar{c}+\bar{a}^2=16^2$$

$$\frac{1}{4}\cdot4\bar{a}-\bar{a}\bar{c}+\bar{a}^2=16^2\Rightarrow$$

$$2a^2-\bar{a}\bar{c}=256$$

Решаем систему $\begin{cases}2a^2+\bar{a}\bar{c}=576\\2a^2-\bar{a}\bar{c}=256\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\sqrt{13}\\\bar{a}\bar{c}=160\end{cases}$

$$\Rightarrow\mathrm{AB}=a=4\sqrt{13}\text{ и }BC=2\mathrm{AB}=8\sqrt{13}$$

6) Найдём скалярный квадрат вектора $\overline{\mathrm{AC}}$:

$$|\overline{\mathrm{AC}}|^2=(\bar{c}-\bar{a})^2=\bar{c}^2-2\bar{a}\bar{c}+\bar{a}^2=4a^2-2\bar{a}\bar{c}+a^2=5a^2-2\bar{a}\bar{c}=$$

$$=5\cdot16\cdot13-2\cdot160=16\cdot45$$

$$AC=4\cdot3\cdot\sqrt{5}=12\sqrt{5}$$

Ответ: AB $=4\sqrt{13}$, BC $=8\sqrt{13}$, AC $=12\sqrt{5}$.

Заметим, что в решениях 1–4 везде используется свойство биссектрисы треугольника, из опыта работы замечу, что это свойство нечасто используют в решениях задач, поэтому не все обучающиеся его хорошо помнят. Приведем еще несколько решений, которые не опираются на свойство биссектрисы треугольника.

Решение 5. Координатный способ

1) Введем систему координат так, чтобы ось Ox проходила через AM, а ось OY через BE (рис. 5).

2) ΔABM – равнобедренный, т. к. BO биссектриса и высота, следовательно AB=BM.

3) Найдем координаты точек: $A(-8;0)$, $O(0;0)$, M$(8;0)$, $B(0;y_b)$.

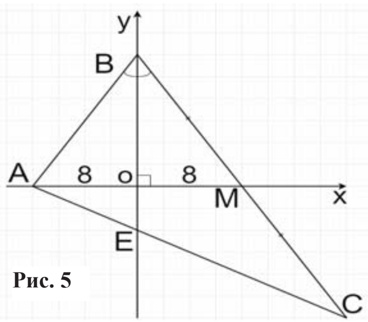


Рис. 5

4) Так кака AM – медиана, то координаты точки M можно найти по формулам координаты середины отрезка $M(\frac{x_B+x_C}{2}; \frac{y_B+y_C}{2})$ $\Rightarrow$

$$8 = \frac{0+y_C}{2}; 0 = \frac{y_B+y_C}{2} \Rightarrow C(16; -y_B)$$

5) Составим уравнение прямой AC: $\frac{x+8}{16+8} = \frac{y-0}{-y_B-0}$

Точка E принадлежит прямой AC $\Rightarrow$ $E(0; y_E)$: $\frac{0+8}{24} = \frac{y_E}{-y_b} \Rightarrow \frac{EO}{OB} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow BE = 16 \Rightarrow BO = 12, OE = 4$$

6) Зная точки $E(0; -4), C(16; -12), A(-8; 0), B(0; 12)$, найдём стороны треугольника как расстояние между двумя точками

$$AB = \sqrt{(0+8)^2 + (12-0)^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{2^2 + 3^2} = 4\sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(16+0)^2 + (-12-12)^2} = \sqrt{16^2 + 24^2} = 8\sqrt{2^2 + 3^2} = 8\sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(16+8)^2 + (-12-0)^2} = \sqrt{24^2 + 12^2} = 12\sqrt{145} = 12\sqrt{5}$$

Ответ: $AB = 4\sqrt{13}, BC = 8\sqrt{13}, AC = 12\sqrt{5}$

Решение 6. Средняя линия треугольника

1) Проведем MK среднюю линию $\Delta BEC \Rightarrow MK \| BE, MK = \frac{1}{2} BE = 8$ (рис. 6)

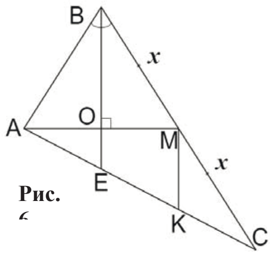


Рис. 6

2) $MK \| BE, AO = OM \Rightarrow$ OE ср. линия ΔAMK $\Rightarrow OE = \frac{1}{2} MK = 4$, BO = 16 – 4 = 12.

3) $\left.\begin{matrix} OE \text{ ср. линия } \Delta AMK \Rightarrow AE = EK \\ MK \text{ ср. линия } \Delta BEC \Rightarrow EK = KC \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AE = EK = KC \Rightarrow AC = 3AE.$$

4) пункт 8) из решения № 1

Решение 7. Теорема Менелая

1) ΔABM – равнобедренный, так как BO биссектриса и высота, $\Rightarrow$ AB = BM = x.

2) BE секущая в ΔACM (рис. 7), тогда по теореме Менелая

$$\frac{MO}{OA} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BM} = 1 \Rightarrow \frac{8}{8} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{2x}{1x} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 3AE$$

2) AM секущая в ΔBCE, тогда по теореме Менелая

$$\frac{EO}{OB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CA}{AE}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{EO}{OB}\cdot\frac{x}{x}\cdot\frac{3y}{1y}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{EO}{OB}=\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$EO=4, OB=12.$$

3) пункт 8) из решения № 1

Ответ: $AB=4\sqrt{13}, BC=8\sqrt{13}, AC=12\sqrt{5}$

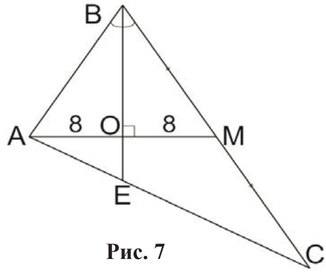


Рис. 7

Кроме рассмотренных решений можно найти и другие, например использовать дополнительные построения или понятие осевой симметрии.

Решение подобных задач позволяет отойти от шаблонных решений, учит рассуждать, развивать гибкость мышления, позволяет применить все полученные ранее знания по геометрии и алгебре, повышает интерес учащихся к изучению геометрии.

Задачи с несколькими способами решения удобно применять при подготовке к итоговой аттестации, на уроках повторения или обобщения материала, также можно возвращаться к такой задаче и в течение всего учебного процесса по курсу геометрии, это уже зависит от опыта и творческого подхода педагога.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипенко Л. А., Стацевичуте Е. Э. Опорные задачи в планиметрии : метод. пособие. Иркутск, 2010. 48 с. : ил. (Университетский лицей).URL: http://ligu.edu38. ru/index. php/2009-10-04-13-53-08/36--q-q
2. Зыкова Е. Э. Некоторые подходы к преподаванию геометрии в инновационных школах // Проблемы учебного процесса в инновационных школах : сб. науч. тр. / под ред. О. В. Кузьмина. Иркутск, 2019. Вып. 24. С. 82–85.
3. Коваленко Е. С., Кузуб Н. М. Алгебраический подход к решению планиметрических задач // Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XIII Всерос. науч.-практ. конф. / под общ. ред. З. А. Дулатовой. Иркутск, 2020. С. 102–106.
4. https://oge.sdamgia. ru/problem?id=351618

И. А. Иванов, С. В. Артемьева, Т. С. Курьякова
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ АСИМПТОТЫ ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В школьном курсе математики важную роль занимает изучение функций и их исследование. На протяжении всего школьного изучения математики учащиеся расширяют багаж имеющихся знаний для исследования функций, знакомясь сначала с областью определения и областью значений, и заканчивая изучение исследования, применением аппарата математического анализа. Одной из важных тем, является изучение понятия *«асимптота»*, её смысла и связь графика функции с графиком асимптоты. В школьном курсе основной акцент делается на рассмотрение *прямолинейных асимптот* (вертикальных, горизонтальных и наклонных), но совсем не рассматривается вопрос об криволинейных асимптотах. Данная статья и будет посвящена рассмотрению *криволинейных асимптот*.

Определение. Если две кривые $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$ имеют бесконечные ветви, и расстояние δ от заданной точки кривой графика y_1 до точки другой кривой y_2 при их бесконечном удалении стремится к нулю $(\delta \to 0)$, то одна кривая (*как правило простейшая*) является *асимптотой* для другой (рис. 1).

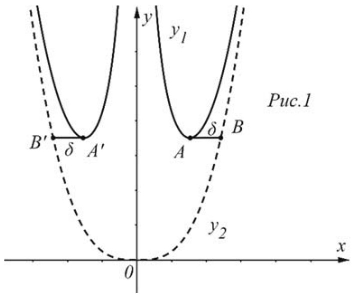


Рис.1

Рассмотрим рациональную функцию $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$, $Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$, $m, n \in N$ и рассмотрим три возможных вида дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в зависимости от значения старших степеней m и n:

А. $m = n$ (*неправильная дробь*).

В случае, когда степень числителя равна степени знаменателя, после приведения дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ к виду $R_k(x) + \dfrac{H_l(x)}{Q_n(x)}$ получаем $R_k(x)$, у которого $k = 0$. Так как старшая степень многочлена $R_k(x)$ равна нулю, то получаем, что $R_k(x)$ примет вид: $R_k(x) = b$ (рис. 2).

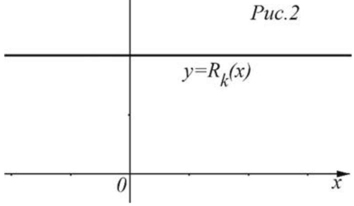
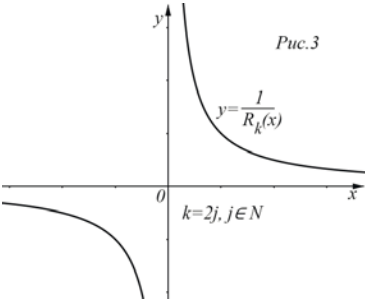
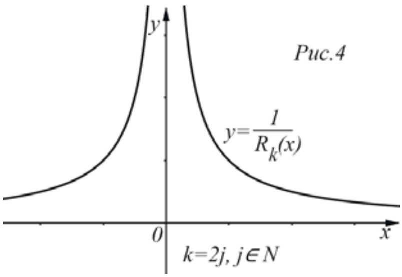


Рис.2

Б. $m < n$ (*правильная дробь*).

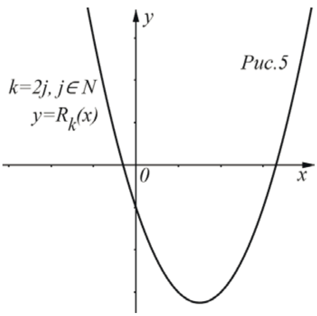
В случае, когда степень числителя меньше степени знаменателя, после приведения дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ к виду $R_k(x)+\frac{H_l(x)}{Q_n(x)}$, где $l \in N,\ k \in Z$ получаем $R_k(x)$, у которого $k < n$. Так как изначально $m < n$, то после преобразования, получаем более точное неравенство $k < 0$ и $R_k(x)$ примет вид $\frac{1}{R_k(x)}$ (рис. 3, 4).

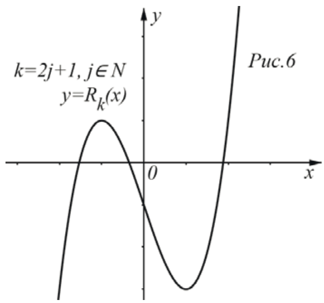


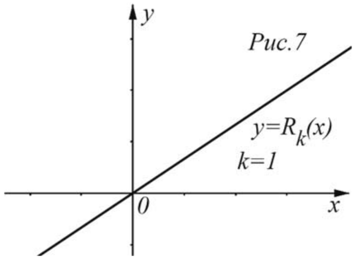


В. $m > n$ (*неправильная дробь*).

В случае, когда степень числителя больше степени знаменателя, после приведения дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ к виду $R_k(x)+\frac{H_l(x)}{Q_n(x)}$ получаем $R_k(x)$, у которого $1 \le k < n$. Так как старшая степень многочлена $R_k(x)$ больше единицы, то получаем, что $R_k(x)$ примет вид: $R_k(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \ldots + c_{k-1}x + c_k$ (рис. 5–7).







Основными средствами распознавания и исследования асимптот является область определения, а именно точки разрыва функции, пределы ветвей асимптоты на бесконечности и в области точек разрыва. Так же, важным подспорьем будет применение эквивалентностей, которые можно применять при стремлении аргумента к точкам разрыва или на бесконечности.

Утверждение. Две бесконечно большие $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность более низшего порядка по сравнению с любой из них: $f(x)\sim g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=o(f(x))$ или $f(x)\sim g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=o(g(x))$.

Используя определение криволинейной асимптоты и утверждение об эквивалентности имеем:

Если две бесконечно большие эквивалентны, то любая из них (обычно простейшая из двух) определяет асимптотический закон для другой.

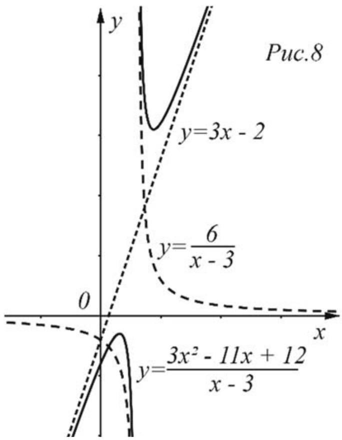
Покажем на примерах нахождение криволинейных асимптот.

Пример 1. $y=\dfrac{3x^2-11x+12}{x-3}$. $Df: x\neq 3$.

Преобразовав $y=f(x)$, получим: $y=3x-2+\dfrac{6}{x-3}$.

При $x\to\pm\infty$ $y=f(x)\sim y=3x-2$, так как $y=\dfrac{6}{x-3}$ стремится к 0.

При $x\to 3$ $y=f(x)\sim y=\dfrac{6}{x-3}$, так как $y=3x-2$ имеет точное значение $f(3)=7$.



Проверим пределы исходной функции и асимптот:

при $x\to\pm\infty$:

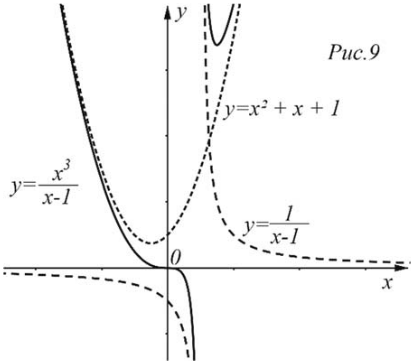
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3x-2)=\pm\infty$.

при $x\to 3$:

$\lim\limits_{x\to 3\pm 0} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{6}{x-3}=\pm\infty$.

Получаем, что $y=\dfrac{6}{x-3}$ является криволинейной асимптотой для функции: $y=\dfrac{3x^2-11x+12}{x-3}$, а $y=3x-2$ – наклонной (рис. 8).

Пример 2. Функция $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ является бесконечно большой при $x\to\pm\infty$, преобразуем её, разделив числитель на знаменатель: $f(x)=x^2+x+1+\dfrac{1}{x-1}$. $f(x)$ по *утверждению* эквивалентна функции $y=x^2$. Однако разность $f(x)-x^2=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ всё ещё есть бесконечно большая хоть и низшего порядка. Функция $y=x^2+x$ по *утверждению* также даёт асимптотический закон



для $f(x)$, причём более точный, разность $f(x)-\left(x^2+x\right)=1+\dfrac{1}{x-1}$ ограничена при $x\to\pm\infty$. Наконец, функция $y=x^2+x+1$ по *утверждению* для функции $f(x)$ даёт столь хороший асимптотический закон, что разность $f(x)-\left(x^2+x+1\right)$ бесконечно мала: $f(x)-\left(x^2+x+1\right)=\dfrac{1}{x-1}=o(f(x))$. В свою же очередь, функция $y=\dfrac{1}{x-1}$ по *определению* также является асимптотой для функции $f(x)$, но только при $x\to 1$ (рис. 9).

Пример 3. $y=\dfrac{3x^4+6x^2+2}{x^2+2}$. $Df: x\in R.$

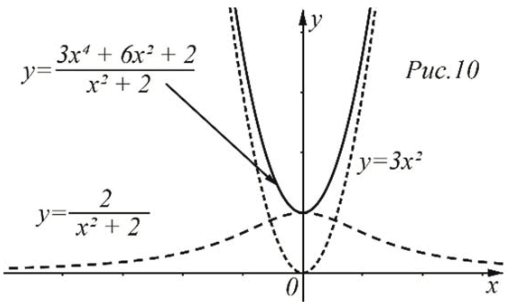
Преобразовав $y=f(x)$, получим: $y=3x^2+\dfrac{2}{x^2+2}$.

При $x\to\pm\infty$ $y=f(x)\sim y=3x^2$, т. к. $y=\dfrac{2}{x^2+2}$ стремится к 0.

Проверим пределы исходной функции и асимптот:

при $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3x^2=\pm\infty$.

Получаем, что $y=3x^2$ является криволинейной асимптотой для функции: $y=\dfrac{3x^4+6x^2+2}{x^2+2}$. (*Рис. 10*).



Пример 4. $y = \dfrac{x^2+5}{x^4-5x^2-3}$. $Df: x \neq \pm\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{37}}}{2}$.

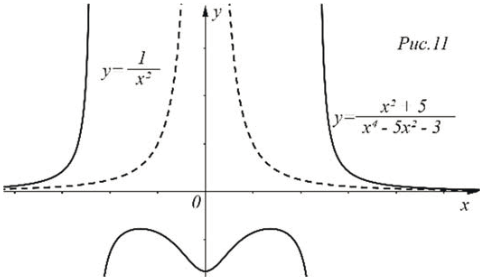
Преобразуем функцию $y = f(x)$, для этого умножим числитель и знаменатель на x^2:

$$y = \frac{x^4+5x^2}{x^2\left(x^4-5x^2-3\right)} = \frac{\left(x^4-5x^2-3\right)+10x^2+3}{x^2\left(x^4-5x^2-3\right)} = \frac{1}{x^2} + \frac{10x^2+3}{x^2\left(x^4-5x^2-3\right)}.$$

Введём следующее обозначение: $y_1 = \dfrac{1}{x^2}$ и рассмотрим предел разности $y - y_1$ при $x \to \pm\infty$.

Имеем: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-y_1) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^4-5x^2-3} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{10x^2+3}{x^6-5x^4-3x^2} = 0$.

Получили, что расстояние между двумя точками кривых y и y_1 при стремлении графиков функции в бесконечность, стремится к нулю, следовательно, $y_1 = \dfrac{1}{x^2}$ является криволинейной асимптотой для $y = f(x)$ *(рис. 11)*.



Пример 5. $y = \dfrac{x^6-5x^4+x^3+27}{x^3}$. $Df: x \neq 0$.

Преобразовав $y = f(x)$, получим: $y = x^3 - 5x + 1 + \dfrac{27}{x^3}$.

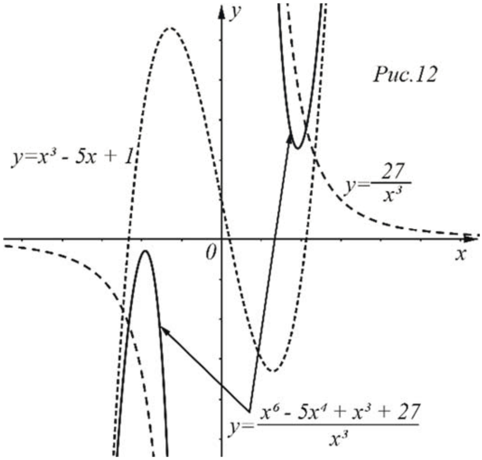
При $x \to \pm\infty$, $y = f(x) \sim y = x^3 - 5x + 1$, так как $y = \dfrac{27}{x^3}$ стремится к 0.

При $x \to 0$, $y = f(x) \sim y = \dfrac{27}{x^3}$, т. к. $y = x^3 - 5x + 1$ имеет точное значение $f(0) = 1$.

Проверим пределы исходной функции и асимптот:

при $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3-5x+1\right) = \pm\infty$.

при $x \to 0$: $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{27}{x^3} = \pm\infty$.



Получаем, что $y=x^3-5x+1$ и $y=\dfrac{27}{x^3}$ являются криволинейными асимптотами для функции: $y=\dfrac{x^6-5x^4+x^3+27}{x^3}$ (*Рис. 12*).

Пример 6. $y=\dfrac{3x^4-5x^3-6x^2+13x+3}{3x-5}$. $Df: x\neq\dfrac{5}{3}$.

Преобразовав $y=f(x)$, получим: $y=x^3-2x+1+\dfrac{8}{3x-5}$.

При $x\to\pm\infty$, $y=f(x)\sim y=x^3-2x+1$, т. к. $y=\dfrac{8}{3x-5}$ стремится к 0.

При $x\to\dfrac{5}{3}$, $y=f(x)\sim y=\dfrac{8}{3x-5}$, т. к. $y=x^3-2x+1$ имеет точное значение $f\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{62}{27}$.

Проверим пределы исходной функции и асимптот:

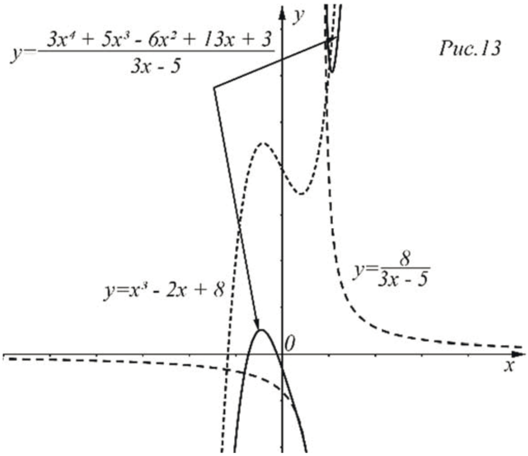
при $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3-2x+1\right)=\pm\infty$.

при $x\to\dfrac{5}{3}$: $\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}\pm 0} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}\pm 0}\dfrac{8}{3x-5}=\pm\infty$.

Получаем, что $y=x^3-2x+1$ и $y=\dfrac{8}{3x-5}$ являются криволинейными асимптотами для функции: $y=\dfrac{3x^4-5x^3-6x^2+13x+3}{3x-5}$. (*Рис. 13*).

Пример 7. $y=\dfrac{x^4+3x^3-3x^2-11x-13}{x^2+x-7}$. $Df: x\neq\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$.

Преобразовав $y=f(x)$, получим: $y=x^2+2x+2+\dfrac{x+1}{x^2+x-7}$.



При $x\to\pm\infty$ $y=f(x)\sim y=x^2+2x+2$, так как $y=\dfrac{x+1}{x^2+x-7}$ стремится к 0.

При $x\to\dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$, $y=f(x)\sim y=\dfrac{x+1}{x^2+x-7}$, т. к. $y=x^2+2x+2$ имеет точное значение $f\left(\dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)=\dfrac{17+\sqrt{29}}{2}$.

При $x\to\dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}$, $y=f(x)\sim y=\dfrac{x+1}{x^2+x-7}$, так как $y=x^2+2x+2$ имеет точное значение $f\left(\dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}\right)=\dfrac{17-\sqrt{29}}{2}$.

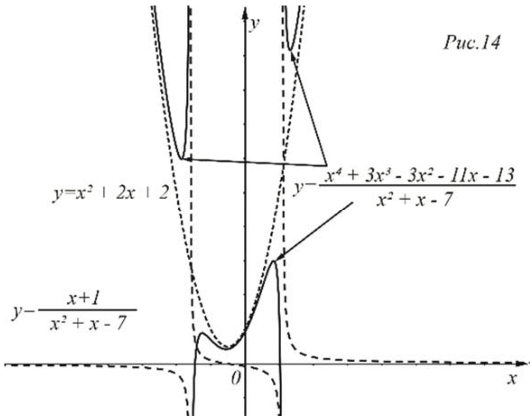
Проверим пределы исходной функции и асимптот:

при $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2+2x+2\right)=\pm\infty$.

при $x\to\dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$: $\lim\limits_{x\to\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\pm0} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\pm0}\dfrac{x+1}{x^2+x-7}=\pm\infty$

при $x\to\dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}$: $\lim\limits_{x\to\frac{-1-\sqrt{29}}{2}\pm0} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to\frac{-1-\sqrt{29}}{2}\pm0}\dfrac{x+1}{x^2+x-7}=\pm\infty$

Получаем, что $y=x^2+2x+2$ и $y=\dfrac{x+1}{x^2+x-7}$ являются криволинейными асимптотами для функции: $y=\dfrac{x^4+3x^3-3x^2-11x-13}{x^2+x-7}$. (рис. 14).



В заключение хочется отметить, что асимптотика функций является отличным инструментом для определения поведения ветвей функции в области точек разрыва функции и на бесконечности. Она существенно облегчают ученикам задачи ШКМ по начертанию образа графиков различного класса функций, но и в большей степени, дробно-рациональных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артемьева С. В., Курьякова Т. С. Математика: Вычисление пределов: учеб. пособие. Иркутск : Репроцентр А1, 2019. 104 с.

2. Курьякова Т. С., Артемьева С. В. Исследование функций средствами элементарной математики : учеб. пособие. Иркутск : Репроцент А1, 2018. 80 с.

3. Павлюченко Ю. В., Рыжов В. В. Графики функций: параметрическое задание : учеб. пособие. М. : Изд-во РУДН, 1997. 186 с.

4. Райхмист Р. Б. Графики функций : справ. пособие для вузов. М. : Высш. шк., 1991. 160 с. : ил.

5. Иванов И. А., Артемьева С. В. Криволинейные асимптоты для разного способа задания кривых // Вестник Иркутского университета. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2021. Вып. 24. С. 186–188.

Н. М. Кальянова, А. А. Гималеева
МКОУ « СОШ № 85», г. Тайшет

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ В ОБУЧЕНИИ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ ЧЕРЕЗ ВНЕДРЕНИЕ КРАЕВЕДЕНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

В изменениях Федерального государственного образовательного стандарта было ориентировано на восприятии учащихся современного школьного образования в соответствие с потребностями времени, современного общества, которое отличается изменчивостью, многообразием существующих в нем связей, широким и неотъемлемым внедрением информационных технологий.

Как учителя математики, мы прекрасно понимаем, что обучающимся сложно воспринимать учебный материал и проектировать его при решении практических задач в реальной жизни. Поэтому на своих уроках мы используем практико-ориентированные задачи, которые необходимы для получения профессиональных навыков и для социализации в обществе.

Проблема организации практико-ориентированного обучения является актуальной в курсе математики, так как современное образование должно подготовить учащихся к решению реальных проблем, встречающихся в жизни. ФГОС ООО и ФГОС СОО включает в себя в функции формирования у школьников универсальных проблем и решение практико-ориентированных задач, которые являются неотъемлемой частью заданий ОГЭ и ЕГЭ как базового, так и профильного уровней

Сегодняшние ученики живут в информационном мире, ученики в силу своего возврата не могут выбирать полезную информацию для внутреннего развития своего мировоззрения.

Применяя исторические сведения родного города при решении задач, тем самым прививаем любовь к малой родине, учим ценить традиции района и изучаем историю родного края. Школьная программа рассчитана на всю страну и не может учесть материал родного края, поэтому перед учителем встает сложная задача поиска и отбора материала для внедрения краеведения в учебную программу школьного курса в отдельных районах нашей страны.

Нами были составлены задачи содержащий исторические сведения о родном городе и развитии железной дороги в Тайшетском районе, основе собранных сведений нашими краеведами семьи Селезневых.

Используя данные задачи, при обобщении изученного материала, развиваем навыки решения практико-ориентированных задач и осуществляем подготовку сдачи ГИА по математике, так как такого рода задачи не включены в ученый материал и учащиеся быстрее запоминают решение стандартных задач, включенных в задания ОГЭ и ЕГЭ по курсу математика.

Основные требования к условию задач, в которых используется краеведческий материал

1. Сюжет и числовые данные задачи должны быть действительными (реальными), данные задачи носят познавательный и воспитательный характер, такого рода задачи воспитывают патриотизм к малой Родине и пробуждают любознательность к математике, географии, истории. У учащихся развивается интерес к таким задачам. Они сами готовы составлять новые задачи используя поиск новой информации по родному краю.

2. Содержание задачи должно быть кратким и понятным учащимся. Математическая сторона задачи не должна заслоняться излишними комментариями, поясняющими ее краеведческую сторону.

3. Материал необходимо подбирать в строгом соответствии с программой по математике данного класса.

Использовать задачи с краеведческим содержанием можно на различных по структуре и методической составляющей уроках математики.

На уроках математики, задачи с внедрением краеведческого материала, должны применяться для решения образовательных и развивающих задач курса математики. Местный материал можно использовать для составления математических задач и других внеклассных мероприятиях.

Алгоритм составления задач на местном краеведческом материале

Для того чтобы составить задачу на местном краеведческом материале:

1. Необходимо изучить те краеведческие факты, которые будут использоваться при её составлении.

2. Выделить факты, содержащие математические данные и определить, какого типа задача будет составляться.

3. Устанавливается зависимость между числами. Задача должна содержать в себе условие и вопрос. При этом нужно помнить, что в задаче должно находиться необходимое количество данных, чтобы можно было ответь на вопрос, поставленный в задаче.

Практическая часть

Учитель может включать данный материал, начиная с 5-го класса. В 5–6-х классах при составлении задач использовались старинные меры, такие как верста, сажень, фут. Данные величины применялись при построении железной дороги в царское время в Тайшетском районе.

Учащиеся при решении задачи учатся не только переводить одну величину в другую. При решении таких задач учащиеся учатся переводить и округлять полученный результат, а также иметь представления, что в реальном мире нет точных и конечных решений.

Для учащихся 8–11-х классов обязательно рассматриваем задачи для профессиональной деятельности. При составлении задач можно применять в условии задачи профессиональные термины, например железнодорожников колея, бровка и осевое сечение. Также в ходе решения можно рассмотреть Гостпри построении насыпи верхнего строения пути. Также учащиеся должны выполнять чертежное построение железной дороги в разрезе.

Задача 1. Длина главного пути на станции – 354 саженя, на станционных путях было уложено 818 шпал и 4704 футов рельсов. Общая протяжённость путей, включая запасные и разъездные, на станции составляло 2 версты 443 сажени. Найдите количество рельсов (рис. 1), уложенных на станции Тайшет, а также на разъездных и запасных путях, если длина рельсы в 1896 г. составляла 10,68 м. Вычислите расстояние между шпалами, если ширина шпалы 0,28 м?

В конце XVIII в. в основном использовалась не обрезная шпала (рис. 1, *б*).

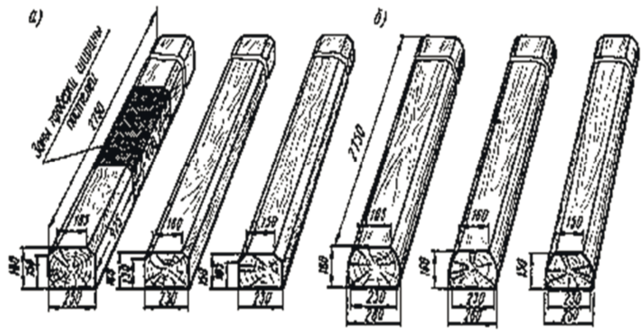


Рис. 1. Схема шпал

Рис. 2. Процесс укладки шпал

Решение. Верста –русская путевая мера. Длина весты равна 1060 м. (В современное время мы не используем данное понятие.) Сажень (сяжень, саженка, прямая сажень) – старорусская единица измерения расстояния, равная 2,13 м.

Ход решения

Первым делом мы найдем количество рельсов на станции Тайшет, а также на разъездных и запасных путях.

1) Для этого стоит сначала найти общую протяжённость путей:
   2 версты 443 саж. $=1060 \cdot 2 + 2,13 \cdot 443 \; = \; 3063,59$ м.

2) Находим количество рельс:

$3063{,}59$ м $: 10{,}68 \cdot 2 = 574$ рельсов.

Ответ: всего было уложено 574 рельсов.

Ответим на второй вопрос и вычислим расстояние между шпалами:

1) На станционных путях было уложено 818 шпал и 4704 футов рельсов.

2) 4704 футов $= 4704 \cdot 0{,}30488 = 1434{,}155$ метров.

3) Теперь найдем протяженность главного пути через длину рельс: $1434{,}155 : 2 = 717$ *метров*.

4) На 717 метров пути ушло 818 шпал. Ширина шпалы = 0,28м, Следовательно:

$$818 \cdot 0{,}28 = 229 \ (\textit{метров дороги занимают шпалы})$$

5) Найдем расстояние пути за вычетом ширины шпал:

$759 - 229 = 488$ метров.

6) Находим расстояние между шпалами:

$$488 : 818 = 0{,}59 \sim 0{,}6 \text{метров}$$

Ответим на второй вопрос и вычислим расстояние между шпалами.

1) На станционных путях было уложено 818 шпал и 4704 футов рельсов.

2) 4704 футов $= 4704 \cdot 0{,}30488 = 1434{,}155$ метров.

3) Теперь найдем протяженность главного пути через длину рельс: $1434{,}155 : 2 = 717$ метров.

4) На 717 метров пути ушло 818 шпал. Ширина шпалы = 0,28м, Следовательно:

$$818 \cdot 0{,}28 = 229 \ (\text{метров дороги занимают шпалы})$$

5) Найдем расстояние пути за вычетом ширины шпал:

$759 - 229 = 488$ метров.

6) Находим расстояние между шпалами:

$$488 : 818 = 0{,}59 \sim 0{,}6 \text{метров}$$

Ответ: расстояние между шпалами 0,6 метров

Задача 2. Через реку Тайшетку на 384-й версте находился деревянный однопутный мост длиной 26 саженей. Высота насыпи в этом месте составляла 2,9 сажени. В 1909 г. мост был перестроен на двухпутный и проложены каменные трубы. Насыпь на пойме реки Тайшетъ 2435 верста, высотой до 5,75 саж., законченная в 1909 г., дает непрерывные, равномерные осадки. Найдите ширину подошвы насыпи в 1900 и 1909 гг., если в ходе строительных работ произошла замена однопутного моста на двухпутный. Длина междупутья равна 2 саж., длина колеи – 0,7 саж, расстояние бровки равно 450 мм. Крутизна откосов насыпи в нормальных условиях принимается 1:1,75, если высота насыпи составляет 12 м, а крутизна откоса при 6м равна 1:1,5 (при строении сооружений пользуемся определением тангенса угла).

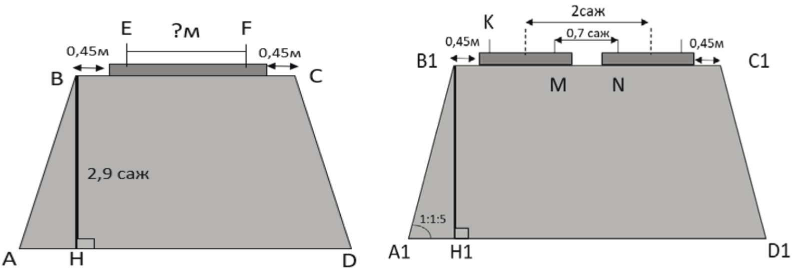


Рис. 3

Задача 3

По фотографии узнать радиус закругления железной дороги и её протяженность по кривой.

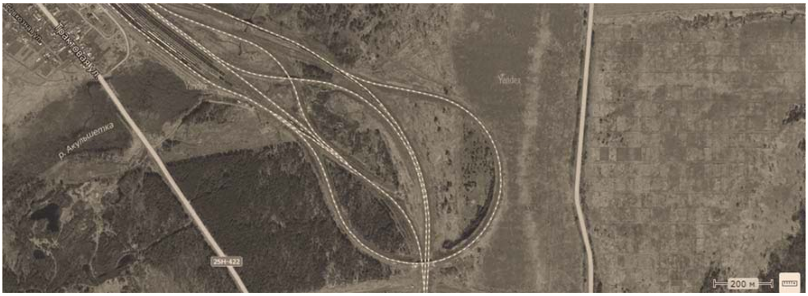


Рис. 4. Закруглённая железная дорога

Применение практико-ориентированных задач с применением краеведческого материала при обучении математике в школе позволит учащемуся закрепить и углубить теоретические знания, овладеть умениями и навыками по следующим учебным дисциплинам: математике, алгебре и геометрии. Уметь связывать учебный процесс с реальными жизненными условиями, проявлять инициативу и самостоятельность.

На уроках математики, элективных и факультативных курсах «Решение текстовых задач» рассматриваем и решаем практико-ориентированные задачи, обучающиеся выполняют мини-проекты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования : офиц. сайт. URL:https://fgos.ru/.

2. С высоты птичьего полета и прожитых лет – 5. URL: http://taishetrn. ru/?p=3661

3. Селезнёв Е. С., Селезнёва Т. А. 2431-я верста из истории строительства станции и посёлка Тайшет. Тайшет, 2013. (Тайшет – город, рожденный Транссибом ; № 8).

4. XXVII. Станция Тайшет, которую не получится объехать. URL: https://periskop.su/2092508.html

Ю. В. Карпина
МБОУ СОШ № 75, г. Иркутск

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА СМЕСИ И СПЛАВЫ

Обучение решению текстовых задач в курсе математики выполняет свою развивающую роль, прежде всего через формирование умения действовать со знаковыми замещениями реальных ситуаций, переводить их в знаковые образования иного рода и использовать при этом переводе (как его средство) выделение основных математических отношений.

В математике есть ряд текстовых задач, которые вызывают затруднение у учащихся при их решении. К таким задачам можно отнести задачи на растворы, смеси и сплавы. Практическое значение этих задач огромно: они являются хорошим средством развития мышления учащихся. Самостоятельно справиться с ними могут немногие. Одна из причин – это то, что задачи на смеси, сплавы, растворы редко встречаются в школьных учебниках, при этом теория и методы решения не описываются.

В своей практической деятельности при подготовке учащихся к ОГЭ и ЕГЭ я применяла различные приемы решения задач на смеси и сплавы. Наиболее эффективно при решении использовать таблицу (метод «чаш»), так как расположение величин в таблице (схеме) позволяет быстрее составить уравнение или систему уравнений, а также осуществить проверку результата.

При обучении решению задач, сначала я знакомлю учащихся с основными понятиями:

– масса смеси (сплава) нескольких веществ (металла) равна сумме масс составляющих компонентов;

– процент – одна сотая часть;

– чистая вода имеет нулевую концентрацию;

– равные массы обозначают за 1.

Далее при работе над задачей следуем алгоритму:

– изучить условия задачи (выделить в тексте условия, которые показывают неизвестную величину, взаимосвязи между величинами);

– определить вид задачи: нахождение массы (концентрации) при смешивании двух смесей (сплавов) определенной концентрации (массы); нахождение массы (концентрации), если в раствор добавляют чистую воду; нахождение отношения масс двух сплавов;

– определить неизвестную величину (величины) из вопроса задачи;

– определить все взаимосвязи между величинами;

– составить таблицу (таблицы), учитывая условия и взаимосвязи между величинами;

– составить и решить уравнение (систему уравнений);

– провести анализ результата и записать ответ.

Рассмотрим некоторые задачи из сборников ОГЭ и ЕГЭ.

Пример 1

Имеются два сосуда, содержащие 12 кг и 8 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 65 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 60 % кислоты. Сколько процентов кислоты содержится во втором растворе?

Из вопроса задачи определяем неизвестные величины. Требуется найти концентрацию.

Пусть

x – количество процентов кислоты в первом растворе,

y – количество процентов кислоты во втором растворе.

Из условий задачи составляем таблицы, учитывая взаимосвязь между величинами, проценты переводим в десятичную дробь:

1-е условие задачи

Сосуд 1	Сосуд 2	Раствор	
12	8	12+8	масса
$0{,}01x$	$0{,}01y$	0,65	концентрация

$0{,}12x + 0{,}08y = 0{,}65(12 + 8)$

2-е условие задачи

Сосуд 1	Сосуд 2	Раствор	
1	1	1 + 1	масса
$0{,}01x$	$0{,}01y$	0,6	концентрация

$0{,}01x + 0{,}01y = 2 \cdot 0{,}6$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}12x + 0{,}08y = 13, \\ 0{,}01x + 0{,}01y = 1{,}2; \end{cases} \begin{cases} 12x + 8y = 1300, \\ x + y = 120; \end{cases} \begin{cases} x = 85 \\ y = 35 \end{cases}$$

Умножим каждое уравнение системы на 100 и решим способом подстановки.

Ответ: 35 % кислоты содержится во втором растворе.

Пример 2

Смешав 8%-ный и 26%-ный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 16%-ный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 20%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 8%-ного раствора использовали для получения смеси?

Из вопроса задачи определяем, что требуется найти массу:

x – масса 8%-ного раствора

y – масса 26%-ногораствора

Учитываем условие, что в раствор добавляют чистую воду.

1-е условие задачи

8%-ный	26%-ный	вода	раствор	
x	y	10	$x+y+10$	масса
0,08	0,26	0	0,16	концентрация

$0{,}08x + 0{,}26y + 10 \cdot 0 = 0{,}16(x + y + 10)$

2-е условие задачи

8%-ный	26%-ный	50%-ный	раствор	
x	y	10	$x+y+10$	масса
0,08	0,26	0,5	0,2	концентрация

$0{,}08x + 0{,}26y + 10 \cdot 0{,}5 = 0{,}2(x + y + 10)$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}08x + 0{,}26y = 0{,}16x + 0{,}16y + 1{,}6, \\ 0{,}08x + 0{,}26y + 5 = 0{,}2x + 0{,}2y + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}08x - 0{,}1y = -1{,}6, \\ 0{,}12x - 0{,}06y = 3; \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на 100 и разделим на (–2), второе уравнение умножим на 100 и разделим на 3. Получим систему и решим ее способом сложения

$$\begin{cases} -4x + 5y = 80, \\ 4x - 2y = 100; \end{cases} \begin{cases} x = 55 \\ y = 60 \end{cases}$$

Ответ: 55 кг 8%-ного раствора использовали для получения смеси.

Пример 3

В каком отношении надо смешать раствор 50 % и 70 % кислоты, чтобы получить раствор 65 % кислоты?

Пусть

x – масса первого раствора

y – масса второго раствора

Раствор 1	Раствор 2		
x	y	$x + y$	масса
0,5	0,7	0,65	концентрация

Составим уравнение:

$0{,}5x + 0{,}7y = 0{,}65(x+y)$

$0{,}65x – 0{,}5x = 7y – 0{,}65y$

$0{,}15x = 0{,}05y$

$3x = y$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

Ответ: в отношении 1: 3.

Применение этого метода решения позволило учащимся с различным уровнем подготовки успешно решать задачи данного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров Б. И. Задачи на составление уравнений : учеб. руководство. М. : Наука, 1990.
2. Прокопенко Н. И. Задачи на смеси и сплавы. М. : Чистые пруды, 2010.
3. Ященко И. В. ЕГЭ математика. Профильный уровень. М. : Народное образование, 2023.
4. Ященко И. В. ОГЭ математика. М. : Народное образование, 2023
5. URL: www.fipi.ru
6. URL: http://www.shevkin. ru

Е. С. Коваленко, Н. М. Кузуб
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ПОДОБНЫХ ФИГУР К РЕШЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

При изучении школьного курса геометрии обучающиеся встречаются с рядом трудностей, которые обусловлены сложностью геометрических соотношений между фигурами и их элементами, как на плоскости, так и в пространстве. Трудности возникают и на уровне доказательства геометрических теорем и утверждений, и на уровне решения планиметрических и стереометрических задач. Это связано с тем, что не существует единого алгоритмизированного подхода к доказательству теоремы или решению любой геометрической задачи [2; 3]. В связи с этим возникает необходимость развивать у обучающихся самостоятельное логическое мышление, чтобы свести к минимуму возможность формального усвоения геометрии.

Важным фактором формирования у обучающихся необходимых умений и навыков для решения задач школьного курса геометрии является использование свойств подобных фигур (в первую очередь, треугольников). Задач, в которых возможно использовать подобие с целью установления взаимосвязи между известными и неизвестными элементами фигуры, очень много, они часто включаются в задания ГИА и ЕГЭ. Главная сложность при решении таких задач состоит в том, что не всегда удается сразу разглядеть в конфигурации фигур, входящих в условие задачи, подобные фигуры. Важную роль в поиске правильного решения играют и хорошо выполненный чертеж, и накопленный опыт решения таких задач самого обучающегося.

Рассмотрим примеры решения задач с использованием свойств подобных фигур.

Задача 1. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен *r*. К окружности проведены касательные, параллельные сторонам треугольника, которые отсекают от него три маленьких треугольника. Радиусы вписанных в эти треугольники окружностей соответственно равны r_1, r_2 и r_3 [1].

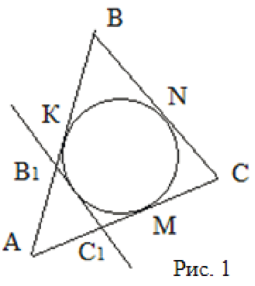


Рис. 1

Доказать, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

Доказательство. 1. Пусть прямая B_1C_1 параллельна стороне BC. Точки K, N, M – точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC (рис. 1). По свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки, имеем: $B_1C_1 = B_1K + C_1M$. Тогда периметр треугольника AB_1C_1 равен:

$$P_{AB_1C_1} = AK + AM = P_1.$$

2. Аналогично можно доказать, что периметры двух других маленьких треугольников будут равны: $P_2 = BK + BN$ и $P_3 = CN + CM$.

3. Суммируем $P_1 + P_2 + P_3 = AK + AM + BK + BN + CN + CM = AB + AC + BC = P_{ABC}$.

4. Очевидно, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны (по двум углам). Если r_1 – радиус вписанной в треугольник AB_1C_1 окружности, то справедливо отношение:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{P_1}{P_{ABC}}.$$

5. Аналогичные соотношения справедливы для двух оставшихся треугольников: $\frac{r_2}{r} = \frac{P_2}{P_{ABC}}$ и $\frac{r_3}{r} = \frac{P_3}{P_{ABC}}$.

6. Сложив левые и правые части этих равенств, получим: $\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} + \frac{r_3}{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_{ABC}} = 1$. Следовательно, $r_1 + r_2 + r_3 = r$. Ч. т. д.

В задаче 1 подобие треугольников ABC и AB_1C_1 было очевидным, оно следовало и из условия самой задачи, и из чертежа к ней. В следующих ниже примерах, чтобы увидеть подобные фигуры, необходимо будет выполнить дополнительные построения.

Задача 2. Треугольник ABC – равнобедренный, AB = AC. Из середины основания H опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC. Точка O – середина отрезка HE. Доказать, что прямые AO и BE перпендикулярны [1].

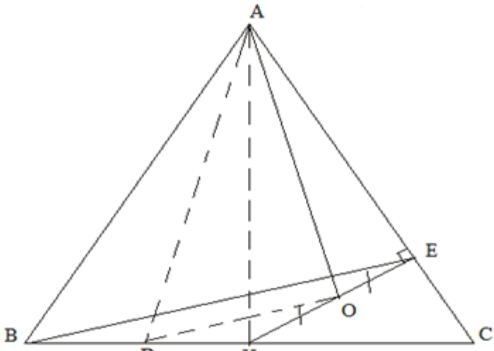


Рис. 2

Доказательство. 1. По условию задачи AH – биссектриса и высота треугольника ABC. Тогда очевидно, что треугольники BHA и HEA подобны (по двум углам). 2. Пусть AD – медиана треугольника ABH (рис. 2). AO – медиана треугольника AEH. Из подобия треугольников Δ BHA $\sim$ Δ HEA имеем: $\frac{AD}{AO} = \frac{AH}{AE}$ или $\frac{AE}{AO} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow$ $\angle DAH = \angle OAE \Rightarrow \angle DAO = \angle HAE$.

3. Получили, что $\frac{AE}{AO} = \frac{AH}{AD}$ и $\angle DAO = \angle HAE$, следовательно, треугольники Δ DAO и Δ HAE подобны.

4. Из $\Delta DAO \sim \Delta HAE \Rightarrow \Delta DAO \sim \Delta BHA \Rightarrow \angle DOA = \angle BHA = 90°$.

5. Рассмотрим ΔBHE, отрезок DO – средняя линия треугольника. Следовательно, $DO \parallel BE \Rightarrow BE \perp AO$. Ч. т. д.

Задача 3. Дан правильный шестиугольник ABCDEF. На его диагоналях CA и CE соответственно взяты точки K и P так, что AK**:**AC = CP**:**CE = k. Точки B, K и P лежат на одной прямой. Найдите значение k [1].

Решение. 1. Проведем диагональ шестиугольника BF (рис. 3). Так как шестиугольник ABCDEF – правильный, то BF || CE, BF = CE. Пусть AC ∩ BF = M. Тогда треугольники BKM и PKC подобны и выполняется равенство: $\frac{BM}{CP} = \frac{MK}{CK}$ (1)

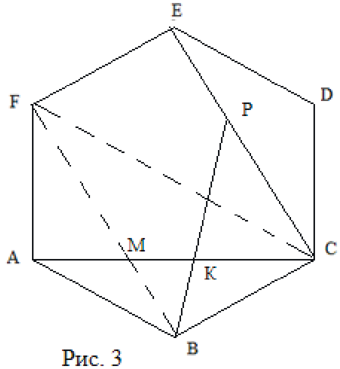


Рис. 3

2. Достроим диагональ CF: AB || CF и CF = 2AB. Рассмотрим трапецию ABCF. Она является равнобедренной и её диагонали равны: AC = BF. Следовательно, треугольники ABM и CFM подобны и справедливо отношение: $\frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MF} = \frac{AB}{CF} = \frac{1}{2}$. Тогда AM = BM = $\frac{1}{3}$ AC.

3. По условию задачи имеем: AK = CP = k AC, AC = CE.

4. Далее CK = AC – AK = AC – k AC = AC (1 – k).

5. MK = CM – CK = $\frac{2}{3}$ AC – AC (1 – k) = $\frac{2}{3}$ AC – AC + k AC = AC (k – $\frac{1}{3}$).

6. Теперь подставим в соотношение (1) величины входящих в него отрезков, которые мы выразили через длину диагонали AC в пунктах 2 – 5:

$$\frac{\frac{1}{3}AC}{k\,AC} = \frac{AC\,(k-\frac{1}{3})}{AC\,(1-k)} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{k} = \frac{(k-\frac{1}{3})}{(1-k)} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 4. Пятиугольник ABCDE вписан в окружность. Расстояние от точки E до прямых AB, BC и CD равны a, b и c соответственно. Найти расстояние от точки E до прямой AD [1].

Решение: 1. Пусть EK ⊥ AB, EL ⊥ BC, EM ⊥ CD, EN ⊥ AD (рис. 4). По условию задачи EK = a, EL = b, EM = c. Пусть EN = d.

2. Так как ∠AKE = ∠ ENA= 90°, то точки K, A, E и N лежат на одной окружности с диаметром AE. А углы ∠EAN = ∠EKN, так как опираются на одну дугу.

3. Аналогично можно рассмотреть четыре точки E, L, C и M, которые лежат на одной окружности с диаметром EC. Тогда очевидно равенство углов ∠ELM = ∠ECM. С другой сто-

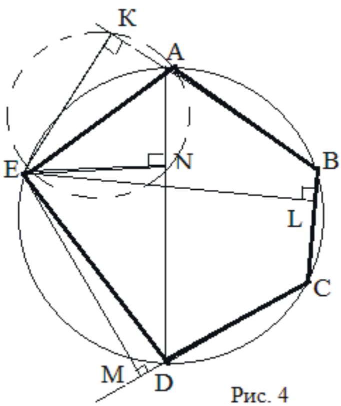


Рис. 4

роны, равны углы ∠EAN = ∠ECM как опирающиеся на одну дугу описанной около пятиугольника окружности. Таким образом, получили, что ∠EKN = ∠ELM.

4. Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что ∠ENK = ∠EML и ∠KEN = ∠LEM. Следовательно, треугольники Δ EKN и Δ ELM подобны.

5. Из подобия Δ EKN ~ Δ ELM имеем: $\frac{EK}{EN} = \frac{EL}{EM} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{b}{c} \Rightarrow d = \frac{ac}{b}$.

Ответ: $d = \frac{ac}{b}$.

Приведенные примеры продемонстрировали, как подобие фигур может быть использовано для решения планиметрических задач. Использование соотношений между соответственными элементами подобных фигур упрощает нахождение неизвестного элемента или доказательство необходимого утверждения. Основная трудность состоит как раз в том, чтобы установить существование подобных фигур, исходя из условия задачи или из чертежа к ней. Преодолеть эту трудность можно, развивая у обучающихся логическое мышление и формируя конструктивные навыки, которые должны базироваться на прочных теоретических знаниях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие. 3-е изд., стер. М. : Наука : Физматлит, 1995. 320 с.

2. Коваленко Е. С., Кузуб Н. М. Применение метода поворота к решению планиметрических задач // Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XV Всерос. науч.-практ. конф. Иркутск, 28–30 марта 2022 г. / под общ. ред. З. А. Дулатовой. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2022. С. 119–122.

3. Коваленко Е. С., Кузуб Н. М. Применение метода геометрических преобразований к решению планиметрических задач // Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XII Всерос. науч. -практ. конф., посвящ/ 110-летию основания Педагогического института в г. Иркутске / под общ. ред. З. А Дулатовой. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2019. С. 139–142.

Е. С. Коваленко, А. А. Черкай
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ПРИ РЕШЕНИИ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Решение одной и той же геометрической задачи, как правило, возможно несколькими способами. Выбор наиболее рационального метода решения всегда труден, но осуществим при условии, что обучающийся владеет несколькими методами и способен их применять на практике.

Метод геометрических преобразований редко используется в школьной практике. Это связано в первую очередь с тем, что движения плоскости изучаются недостаточно глубоко, а представления школьников о геометрических преобразованиях плоскости носят скорее ознакомительный характер. Между тем суть данного метода заключается в привлечении того или иного геометрического преобразования, опираясь на свойства которого задача может быть решена [4; 5].

В курсе основной школы изучается некоторые движения плоскости, такие как параллельный перенос, осевая и центральная симметрии, поворот. Рассмотрим метод решения планиметрических задач, основанный на свойствах параллельного переноса. Этот метод применяется при решении геометрической задачи, если возможно перенести параллельно отдельные части фигуры, чтобы получить вспомогательную фигуру, которая связывает данные задачи и ведет к ее решению [1].

Метод параллельного переноса чаще всего применяется для решения задач на четырёхугольники. При этом обычно переносят один или несколько отрезков так, чтобы получился вспомогательный треугольник, с которого можно начать решение. Данным методом можно решать все основные типы задач: на доказательство, на вычисление, на построение [2].

Задача 1. Две окружности радиуса R касаются в точке K. На одной из них взята точка A, а на другой – точка B, при чём $\angle$ AKB = 90°. Докажите, что AB = 2R.

Доказательство. Пусть O_1 и O_2 – центры первой и второй окружностей, обозначим угол $\angle AO_1K = \alpha$.

Рассмотрим треугольник $\Delta\, AO_1K$ (рис. 1): $O_1K = O_1A = R$, следовательно, $\Delta\, AO_1K$ – равнобедренный.

Так как $\angle AO_1K = \alpha$, то $\angle AKO_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}$ и $\angle KAO_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

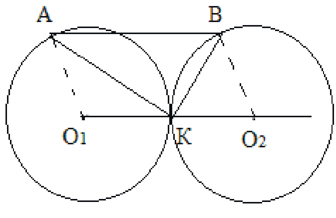


Рис. 1

Рассмотрим треугольник Δ BO_2K: $\angle BKO_2 = 180° - 90° - (90° - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$. Тогда легко показать, что $\angle KO_2B = 180° - \alpha$. Следовательно, прямые $AO_1 \parallel BO_2$, а отрезки $AO_1 = BO_2$.

Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$: $AO_1 \longrightarrow BO_2$, т. е. точка A перейдет в точку B, и тогда по свойству параллельного переноса $AB = O_1O_2$. Следовательно, AB = 2R. Ч. т. д.

Рассмотрим второй тип задач – задачу на вычисление, которую тоже решим методом параллельного переноса.

Задача 2. Задана трапеция MNLK с основаниями, равными 4 см и 11 см. Её диагонали равны 9 см и 12 см. Найдите площадь MNLK [3].

Решение. Пусть основания трапеции NL = 4 см и MK = 11 см, а диагонали KN = 9 см и ML = 12 см (рис. 2).

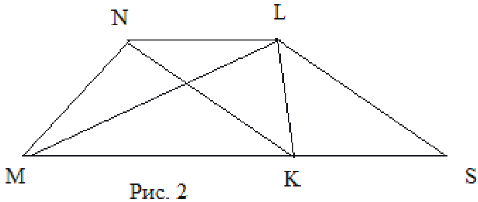


Рис. 2

Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{NL}$: $K \longrightarrow S$, $NL \parallel KS$ и NL = KS = 4 см.

Тогда NLKM – параллелограмм и NK = LS = 9 см.

Рассмотрим треугольник ΔMLS: MS = MK + KS = MK + NL = 11+4 =15 см. С другой стороны, трапеция MNLK и треугольник ΔMLS имеют общую высоту, следовательно, являются равновеликими фигурами. То есть их площади равны: $S_{\text{MNLK}} = S_{\Delta\text{MLS}}$. Значит, решение задачи сводится к нахождению площади треугольника ΔMLS.

Легко заметить, что ΔMLS – прямоугольный, так как 92 + 122 = 152. Найдем площадь ΔMLS: $S_{\Delta\text{MLS}} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ см2 $\Longrightarrow S_{\text{MNLK}} = 54$ см2.

Ответ: $S_{\text{MNLK}} = 54$ см2.

Третий тип задач – это задачи на построение. Часто в задачах данного вида требуется построить фигуру по ее отдельно заданным элементам. Схема решения такой задачи, состоит из определенных этапов: анализа, построения, доказательства и исследования. Рассмотрим задачу данного типа.

Задача 3. Построить трапецию, если даны четыре ее стороны [2].

Дано: стороны трапеции заданы отрезками (рис. 3).

Построить: трапецию по данным сторонам.

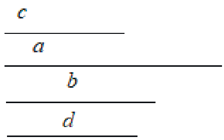


Рис. 3

Решение. *Анализ*. Необходимо установить зависимость между элементами искомой фигуры и заданными элементами. Для этого представим, что задача решена и изобразим схематично искомую фигуру – трапецию ABCD (рис. 4). Пусть AD – большее основание, BC – меньшее основание, AB и CD – боковые стороны. Пусть AD = a, AB = b, BC = c, CD = d.

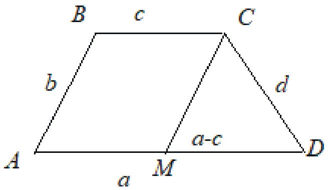


Рис. 4

Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{BC}$: AB ⟶ MC, причем AB = MC = b, а BC = AM = c.

Тогда ΔMCD является искомой вспомогательной фигурой, так как все его стороны известны: MC = b, CD = d и MD = a – c. Следовательно, мы можем начать построение с треугольника ΔMCD по трем сторонам, а затем с помощью обратного параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MA}$ легко достроим искомую трапецию.

Построение. На данном этапе выполняется построение искомой фигуры с помощью инструментов – циркуля и линейки. Каждый шаг построения фиксируется:

Строим треугольник ΔMCD по трем сторонам: MC = b, CD = d и MD = a – с.

Выполним параллельный перенос точки C на вектор $\overrightarrow{CB}$, где CB = c и CB ∥ MD, тогда C ⟶ B и M ⟶ A.

ABCD – искомая трапеция.

Доказательство. На этом этапе требуется установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем условиям задачи.

По построению стороны треугольника ΔMCD равны MC = b, CD = d и MD = a – с.

Длина вектора $|\overrightarrow{CB}|$ = c – по построению.

По свойству параллельного переноса: CB ∥ DA, AM = c, AB = b, тогда в трапеции ABCD: AB = b, BC = c, CD = d, AD = (a – с.) + c = a. Ч. т. д.

Исследование. Цель данного этапа заключается в установлении условий разрешимости задачи и определении числа её решений. Для этого необходимо ответить на следующие вопросы: 1) всегда ли существует решение задачи; 2) сколько решений имеет задача при каждом выборе данных.

Так как решение задачи сводится к построению треугольника ΔMCD по трем сторонам, то задача имеет всегда решение, если выполняется неравенство треугольника $|b - d| < a - c < |b + d|$. Причем это решение единственное в силу третьего признака равенства треугольников. Все остальные шаги построения выполнимы.

В данной статье был рассмотрен только один из методов геометрических преобразований – метод параллельного переноса. Актуальность изучения этой темы заключается в том, что в процессе овладения умением решать задачи методом геометрических преобразований требуется не только знание самих преобразований плоскости, но и активное использование всей геометрической теории, что в свою очередь, оказывает положительное влияние на развитие геометрической интуиции и культуры обучающихся, формирует у них конструктивные навыки, необходимые для решения таких задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение (с решениями) / под ред. Н. В. Наумович. Изд. 20-е. М: КомКнига, 2010. 176 с.

2. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости : пособие для студентов пед. ин-тов. Изд. 2-е. М. : Учпедгиз, 1957. 267 с.

3. Блинков А. Д., Блинков Ю. А. Геометрические задачи на построение. 2-е изд., стер. М. : МЦНМО, 2012. 152 с.

4. Зыкова Е. Э. Некоторые подходы к преподаванию геометрии в инновационных школах // Проблемы учебного процесса в инновационных школах : сб. науч. тр. Иркутск, 2019. Вып. 24. С. 82–85.

5. Яглом И. М. Геометрические преобразования М. : Гос. Изд-во техн.-теорет. лит., 1955. 282 с.

С. В. Королева
ГАПОУ ИО «Иркутский технологический колледж», г. Иркутск

ПРОФИЛИРОВАНИЕ СОДЕРЖАНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА КАК ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ КАЧЕСТВ БУДУЩЕГО СПЕЦИАЛИСТА НА УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЯХ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

Перед образованием особо остро стоит задача подготовки таких специалистов, которые обладают профессиональной мобильностью, способных быстро реагировать на изменения в профессиональной деятельности и, главное, умеющих использовать знания, умения и навыки, полученные в ходе изучения отдельных дисциплин в интегративной связи для решения различных профессиональных задач.

Профильное содержание общеобразовательной учебной дисциплины математика специальности «Коммерция» имеет исключительно важное значение как для всего процесса обучения в колледже, так и для последующей профессиональной деятельности обучающегося.

Одним из требований, содержащихся в рабочей программе учебной дисциплины, является формирование представлений о математике как универсальном языке позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

Профильная подготовка, учитывая специфику специальности «Коммерция» в торговой отрасли, организуется в форме проведения теоретических и практических занятий, связанных с профессиональной деятельностью менеджера по продажам, акцентирована в рабочей программе как профессионально – ориентированные занятия. Практические занятия содержат математические задачи и профессионально-ориентированные задачи.

Профессионально-ориентированные задачи – это, прежде всего, учебные задачи и, они способствуют приобретению знаний по учебной дисциплине математика. Профессионально-ориентированные задачи, несомненно, вызывают интерес и мотивацию к изучению курса математики. Подбор задач, формирующих элементарные навыки приложения математики, дело не простое. Задачи профессиональной направленности приходится тщательно просматривать и отбирать нужный материал.

Для примера возьмем специальность «Коммерция». Именно для коммерческой деятельности необходимо применение математических методов для установления взаимосвязей между различными параметрами в производстве и реализации продукции, в результате применения таких методов становится видна количественная сторона производственного процесса и определяется реальная выгода и убыток от профессиональной деятельности. На примере специальности становится понятно, что без базовых математических знаний невозможно осуществление дальнейшей деятельности. Но для лучшего усвоения и повышения мотивации необходимо показывать связь знаний с реальными ситуациями, которые могут возникнуть при решении различных проблем в профессиональной деятельности. Профессионально значимыми для специальности «Коммерция» являются знания и навыки счётного характера, умение оперировать обыкновенными и десятичными дробями, вычислять простые и сложные проценты, исследовать функцию, развитие пространственного воображения в ходе решения геометрических задач на нахождение площадей боковой и полной поверхностей геометрических тел, а также их объемов. При решении задач с профильным содержанием у обучающихся формируется умение строить математические модели, т. е. переводить условие задачи на математический язык, а также пользоваться наиболее доступными и в то же время эффективными методами решения и исследования таких моделей.

Решая такие задачи, обучающиеся могут убедиться, что математика – это инструмент, с помощью которого разрешаются различные профессиональные проблемы.

Удачно подобранные задачи позволяют повысить интерес к изучаемому материалу дисциплины математика. Мною разработано учебно-методическое пособие по выполнению практической работы в рамках основной профессиональной образовательной программы СПО по специальности «Коммерция» (по отраслям) базовой подготовки ОУД «Математика». *Цель пособия*: научить студентов ориентироваться в производственных процессах, видеть их отдельные элементы в функциональной связи, раскрыть соотношения между ними.

Например, профессионально-ориентированное занятие. *Практическая работа № 31. Решение задач на применение показательной функции в банковских расчетах при вложении денег на счет и начислением процентов*.

Цель работы: научиться применять показательную функцию в экономических расчетах производства.

Выполняя данную работу, студент сможет*:*

– решать показательные уравнения различными методами;

– строить графики показательной функции;

– применять понятие показательной функции в банковских расчетах и начислении процентов.

Порядок выполнения работы:

1. Ответить на контрольные вопросы:

2. Выполнить вариант практической работы.

1. Ответить на контрольные вопросы:

✓ Дайте определение показательной функции.

✓ Запишите свойства показательной функции.

✓ Перечислите основные методы решения показательных уравнений.

✓ Какая показательная функция называется возрастающей, убывающей?

✓ Найти % от 15 000 рублей: 1 %, 10 %, 50 %

✓ Сколько % составляет число10 от: 200, 50, 30, 10

✓ Какое из уравнений имеет положительный корень $2^x = 70$; $7^x = 0,5$; $0,1^x=1$?

Вариант 1

1. Решите уравнение: а) $8^{-1} \cdot 2^{3x} = 8$; б) $5^x - 7 \cdot 5^{x-2} = 90$; в) $9^x + 3^{x+1} = 18$

2. На вклад, помещенный в банк под 26 % годовых прибыль за год, составила 13 500 руб. Какова сумма вклада.

3. Определите будущую стоимость капитала, если первоначальная его стоимость 200 000 руб., срок инвестирования 10 лет, процентная ставка 12 % годовых.

Задание.

1) Заполнить таблицу, посчитав значения суммы по формуле $S = P(1+i)^n$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S										

2) Построить график функции
3) Написать вывод

4. Прирост продукции на птицефабрике по сравнению с предыдущим годом за первый год составляет 6 %, а за второй по сравнению с первым – 4 %. Каким оказался процент прироста продукции за три года, если процент прироста продукции за третий год по сравнению со вторым был равен 3 %?[4]

5. Стоимость оборудования минимаркета равна 500 тыс. р. Известно, что через 10 лет стоимость этого оборудования вследствие амортизации будет равна 200 тыс. р. Найдите процент ежегодной амортизации оборудования.

6. Постройте кривую спроса и предложения. Продается телевизор. Покупатели с различным уровнем дохода, готовы купить его по разным ценам. В итоге сложилась такая картина:

Цена телевизора (P), руб.	9000	8000	7000	6000	5000	4000	3000
Количество покупателей, (Q)	2	3	5	8	11	13	16

1) Постройте кривую спроса и ответьте на вопросы:
- ✓ Как будет влиять на кривую изменение цены на телевизор?
- ✓ Что произойдет с кривой спроса, если спрос увеличится?
- ✓ Что произойдет с кривой спроса, если спрос снизится?

Критерии оценки:

«5» – верно выполнены 6 заданий; «4» – верно выполнены 5 заданий

«3» – верно выполнены 4–3 задания; «2» – выполнены менее 3 заданий

На практическом занятии по теме «Действительные числа. Приближенные вычисления и вычислительные средства» предлагаю студентам решить следующие задачи.

Задача 1. План розничного товарооборота по магазину за месяц составил 130 млн руб. План был перевыполнен на 3 %. Определить сумму перевыполнения плана.

Задача 2. В магазин поступила сметана в бочке. На трафарете указана масса бочки 1,5 кг. При взвешивании бочки после продажи сметаны установлена ее фактическая масса – 1,7 кг. Один килограмм сметаны стоит 240 руб. Определить завес тары в весовом и денежном выражении.

На практическом занятии по теме «Числовые функции. Графики и свойства функций» студенты решают задачу 3.

Задача 3. Зависимость спроса от дохода покупателя [3].

В результате маркетинговых исследований, где получена следующая зависимость спроса на продукты питания за месяц в семьях с различным среднедушевым доходом (табл. 1). Построить график спроса на эти продукты питания. Сделать выводы.

Таблица 1

Среднедушевой доход семьи, р. /мес	Спрос за неделю, кг		
	Хлеб	Крупы	Яблоки
5000	3	3	0,5
6000	3	2	1
7000	2,5	1	2
8000	2,5	0,5	2
9000	2,5	0,5	3,5
10000	2,5	0,5	5

На практическом занятии по теме «Многогранники» студенты задачу 4.

Задача 4. Определить экономическую выгоду формы упаковки сока вместимостью 0,3 литра на 2000 упаковок.

1. Определение площади поверхности упаковки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда (вместимость – 0,3 литра)

Кол-во упаковок	Длина (a)	Ширина (b)	Высота (h)	$S_{осн.}$	$S_{бок. пов.}$	$S_{полн. пов.}$
1	6 см	2,5 см	11 см	15 см^2	187 см^2	217 см^2 = 0,022 м^2

2. Определение площади поверхности упаковки, имеющей форму правильного тетраэдра (вместимость – 0,3 литра).

Кол-во упаковок	Сторонаграни (a)	S_1 (площадь одной грани по формуле Герона)	$S_{полн. пов.}$
1	11 см	52,4 см^2	209,6 см^2 =0,02096 м^2

В практическом занятии по теме «Производная функции» предлагаю студентам задачу 5.

Задача 5. Мясокомбинат производит X тонн мясопродуктов в день. По договору он должен ежедневно поставлять в торговую сеть «Магнит» не менее 20 тонн мясопродуктов. Производственные мощности комбината таковы, что выпуск не может превышать 90 тонн в день.

Определить: 1) при каком объёме производства удельные затраты производства будут наибольшими (наименьшими);

2) выгодно ли торговой сети «Магнит» быть единственным партнёром мясокомбината.

На практическом занятии по теме «Первообразная и интеграл» студенты решают задачу 6.

Задача 6. Площадь фигуры, изображенной на рис. 1, – это площадь складского помещения магазина, и она вычисляется по формуле [2]:

а) $S = \int_{-2}^{2}(x^2 - 2)dx - 2$; б) $S = \int_{-1}^{1}(x^2 + 2)dx + 2$; в) $S = \int_{-2}^{1}(x^2 + 2)dx - 2$.

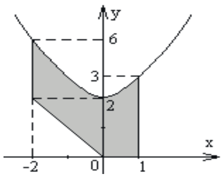


Рис. 1. Площадь фигуры

Определите формулу площади из предложенных вариантов и найдите площадь складского помещения.

Профессиональная направленность обучения математики способствует повышению мотивации к процессу обучения и овладению обучающимися навыками математического моделирования в области будущей профессиональной деятельности.

Таким образом, профилирование содержания учебного материала дисциплины математика, способствуют развитию общих и профессиональных компетенций студентов специальности «Коммерция».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусев В. А., Григорьев С. Г. Математика : учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования.7-е изд. М. : Академия, 2014. 416 с.

2. Григорьев С. Г. , Иволгина С. В. Математика : учеб. для студ. образоват. учреждений. 7-е изд., М. : Академия, 2012. 416с.

3. Пехлецкий И. Д. Математика : учеб. для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования. 10-е изд. М. : Академия, 2013. 304 с.

4. Справочник по математике для школьников. URL: https://www.resolventa.ru/demo/demomath.htm / (дата обращения: 12.09.2022).

Н. М. Кузуб, Е. С. Коваленко
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Геометрические задачи традиционно вызывают затруднения у обучающихся, как в логическом, техническом, так и психологическом аспектах. Для решения геометрических задач универсального метода нет, но существует большое число эвристических приемов, которые применяются к решению определенного круга задач [2]. Если в условии задачи имеется медиана, то обучающийся не всегда понимает, как её использовать при решении задач на доказательство или вычисление. В таких случаях имеет смысл применить метод геометрических преобразований, например, центральную симметрию [3]. Для описания такого метода рассмотрим задачу, в условии которой заданы стороны треугольника и, проведенная из их общей вершины, медиана.

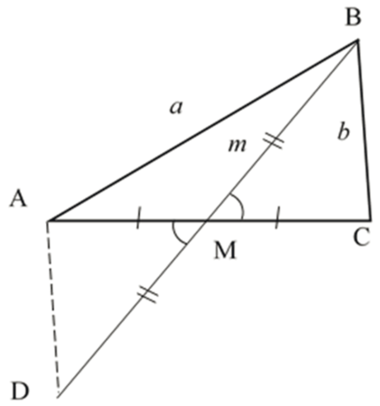


Рис. 1

Пример. Требуется построить треугольник, в котором заданы две стороны и медиана, проведенная из их общей вершины.

Решение. Пусть в треугольнике ABC: BM – медиана, $AB = a$, $BC = b$, $BM = m$. Построим точку D, симметричную точке B, относительно точки M (рис. 1). Следовательно, треугольники CBM и ADM равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому AD = BC = b. Тогда можно построить вспомогательный треугольник ABD по трем сторонам: $AB = a$, $BC = b$, $BD = 2m$. Точка M – середина BD. Далее строим треугольник ABC.

На основании решения этой задачи на построение можно решить более сложные задачи на вычисление и доказательство. Центральная симметрия определяется заданием центра или одной пары соответственных точек. Параллелограмм – это центрально-симметричная фигура. Потому при решении задач будем рассматривать параллелограмм, который строится с использованием центральной симметрии относительно точки пересечения диагоналей. Используя свойства параллелограмма и их следствия, обосновываем искомый факт в задаче.

Задача 1. Стороны треугольника равны *a, b, c*. Вычислить медиану m_c, проведенную к стороне с [1].

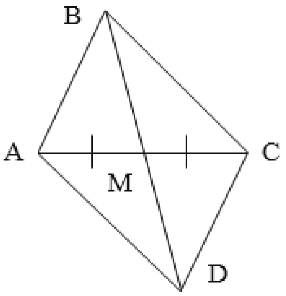


Рис. 2

Решение. Пусть в треугольнике ABC: $AB = a, BC = b, AC = c$.

Воспользуемся решением примера. Пусть BM – медиана. Построим точку D, симметричную точке B, относительно точки M. В результате получаем параллелограмм ABCD (рис. 2).

Используя свойство параллелограмма о сумме квадратов его диагоналей, получаем $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$. Следовательно, $c^2 + (2m_c)^2 = 2a^2 + 2b^2$. Из этого равенства находим длину медианы:

$$m_c = \frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}.$$

Задача 2. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90°$) угол CBM равен 30°, где M – середина AC. Найти отношение сторон треугольника AB и BC.

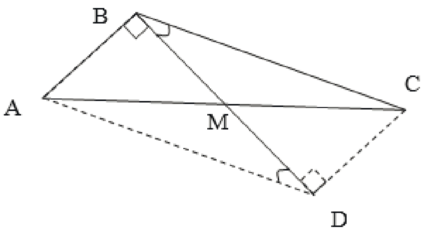


Рис. 3

Решение. Строим параллелограмм ABCD (рис. 3). Углы ∠ ADB и ∠CBD накрест лежащие, поэтому ∠ADB = ∠ CBD = 30°. Так как треугольник ABD прямоугольный и ∠ADB = 30°, то катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Поэтому AB : AD = 1 : 2. По свойству параллелограмма AD = BC, следовательно, AB : BC = 1 : 2.

Задача 3. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты ABDE и BCKM. Докажите, что отрезок DM в два раза больше меданы BP треугольника ABC.

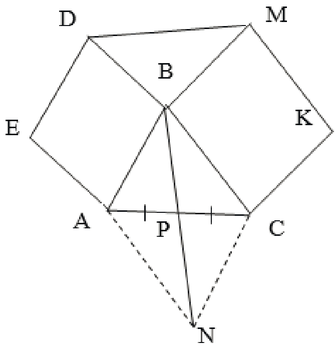


Рис. 4

Решение. Так как BP – медиана в треугольнике ABC. Построим параллелограмм ABCN (рис. 4). Рассмотрим треугольники DBM и BCN. Стороны BD и CN равны, так как DB =AB (по определению квадрата) и AB = CN (по свойству параллелограмма). Стороны BM и BC тоже равны.

Пусть в параллелограмме ABCN ∠CBN = α, ∠ABN = β, тогда ∠ MBD = 180° – α – β. В треугольнике BCN ∠ CBN = α,

$\angle BNC = \beta$, поэтому $\angle BCN = 180° - \alpha - \beta$. Следовательно, треугольники DBM и BCN равны по первому признаку равенства треугольников. Поэтому DM = BN. По свойству параллелограмма, DM = 2BP.

Задача 4. Доказать, что в любом треугольнике сумма медиан меньше периметра [1].

Решение. Пусть в треугольнике ABC: $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, m_a, m_b, m_c – медианы. Построим параллелограмм ABCN (рис. 5). Рассмотрим треугольник BCN:

$BN < BC + CN$ – неравенство треугольника. Следовательно,

$2m_c < b + a$. Аналогично,

$2m_a < b + c$, $2m_b < a + c$.

Из найденных неравенств получим, что $2(m_a + m_b + m_c) < 2a + 2b + 2c$. Поэтому $m_a + m_b + m_c < a + b + c$.

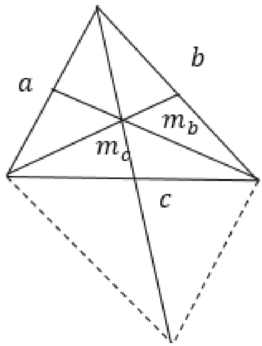


Рис.5

Задача 5. Точки D и E делят отрезок AC треугольника ABC на три равные части. Доказать, что BD + BE < AB + BC.

Решение. Пусть в треугольнике ABC: AD = DE = EC. Строим параллелограмм ABEM (рис. 6). Аналогично, строим параллелограмм DBCN.

Рассмотрим треугольник ABM. Так как BM < AB + AM и BM < BE + EM =

= BE + AB, то $2BD < AB + BE$. Аналогично, рассмотрим треугольник BCN. Сторона BN < BC + CN и BN < BD + DN = = BC + BD , то $2BE < BC + BD$.

Таким образом, сложив полученные неравенства, имеем:

$2BD + 2BE < AB + BE + BC + BD$.

Следовательно,

$BD + BE < AB + BC$.

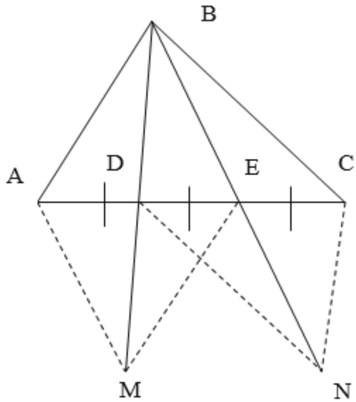


Рис.6

В этой статье рассмотрели прием, позволяющий применять центральную симметрию для решения геометрических задач на доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. М. : МЦНМО, 2006. 416 с.
2. Зыкова Е. Э. Некоторые подходы к преподаванию геометрии в инновационных школах // Проблемы учебного процесса в инновационных школах : сб. науч. тр. Иркутск, 2019. Вып. 24. С. 82–85.
3. Коваленко Е. С., Кузуб Н. М. Применение метода геометрических преобразований к решению планиметрических задач // Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XII Всерос. науч. -практ. конф., посвящ. 110-летию основания Педагогического института в г. Иркутске. Иркутск : ИГУ, 2019. С. 139–142.

Е. С. Курдамосова
МБОУ ШР «Шелеховский лицей», г. Шелехов

БЛОЧНО-МОДУЛЬНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ КАК НАПРАВЛЯЮЩИЙ ВЕКТОР УСПЕШНОСТИ В ОБУЧЕНИИ ВЫПУСКНИКА

Необходим синтез всего лучшего,
что было в советской системе образования
и опыта последних десятилетий.
В. В. Путин
(Послание Президента Федеральному собранию 21. 02. 2023)

Актуальность. «Модернизация и инновационное развитие – единственный путь, который позволит России стать конкурентным обществом в мире XXI века» – так обозначены приоритетные задачи системы образования в инициативе президента «Наша новая школа». В условиях решения этих задач важнейшими качествами личности становятся инициативность, способность творчески мыслить и находить нестандартные решения, умение выбирать профессиональный путь.

И поэтому главная задача современной школы – раскрыть способности каждого ученика и воспитать личность, готовую к жизни в конкурентном мире. Индивидуальный, личностно-ориентированный подход, определённый в инициативе «Наша новая школа» реализую на практике последние 19 лет.

С 1988 по 1994 г. я изучала школьную программу по математике в рамках блочно-модульной технологии обучения, учитель – Беликова Валентина Дмитриевна. Данная технология содержит основу методики выдающегося педагога Виктора Фёдоровича Шаталова. Выпускники нашего класса успешно закончили школу и продолжили образовательный путь в вузах нашей страны и за рубежом. Среди выпускников – 7 действующих учителей математики на сегодняшний день. Трое работают учителями математики в г. Шелехове. Более 35 лет назад технология увлекала детей заниматься математикой так, что она стала главным интересом жизнедеятельности выпускников.

Многолетнее применение мной на практике блочно-модульной технологии обучения позволило получить стабильно высокие результаты учебной деятельности и на сегодняшний день: качество знаний значительно выше среднеобластных показателей, что доказывает факт увлечённости математикой и современных школьников.

Таблица 1

	Год	Группа	Средний балл	Средний балл по области	Средний балл по району
ЕГЭ Математика профиль	2019–2020	28–41	67	46	48
ЕГЭ	2020–2021	29–41	65,54	46,52	50,2

Математика профиль					
ЕГЭ Математика профиль	2020–2021	29–11	68,74	46,52	50,2

Полагаю, что трансляция накопленного мною опыта применения блочно-модульной технологии обучения математике может быть полезна учителям при разработке программ экспериментального обучения.

Методическая обоснованность. Главный девиз В. Ф. Шаталова – «Никаких упрощений! Можно только усложнять. И нужно усложнять!»

В основу технологии положена идея разработки и реализации исследовательских образовательных траекторий лицеистов при обучении математике. Выстраиваю индивидуальные образовательные технологии по двум основным направлениям:

1) балльно-рейтинговая система оценки знаний обучающихся в контексте блочно-модульной технологии преподавания математики;

2) реализация проблемно-познавательных программ учеников в контексте урочной занятости.

Главный принцип, реализуемый в блочно-модульной технологии обучения, – увлечь, создать ситуацию успеха, научить.

Разработанная система содержит 2 блока:

1) учебный блок – это лекции (опорные конспекты по изучаемому блоку), семинары, обязательные и обучающие практикумы, практикумы успеха и корректировки знаний, обобщения и систематизации. Лекции по укрупнённой единице материала учитель даёт в виде конспекта. К следующему уроку дети самостоятельно разбирают лекцию более глубоко, готовят на доске теорию с доказательством и примерами по данному блоку. При этом они договариваются между собой о распределении материала и об очерёдности их выступления. Все виды деятельности по лекции оцениваются дополнительными баллами, которыми может воспользоваться ученик при корректировки некоторых отметок в положительную сторону. Оценивают и дети, и учитель;

2) блок контроля представляет собой систему приемов и методов для мониторинга успешности освоения учениками всех видов учебной деятельности. Главная цель – получение качественного образования. Учитель оценивает учащихся на всех этапах изучения блока. Все оценки, полученные ребятами на уроках, заносятся в «Листы открытого учёта знаний». Нетрудно догадаться, что всеохватывающий контроль не может не сказаться положительно на отношение ребят к учёбе. Уже после нескольких первых уроков дети начинают понимать, что никаких «лазеек» нет, необходимо работать самостоятельно в ежедневном режиме. Ученик имеет право на лучшую оценку. Некоторые виды работ он может пересдать, подготовив теорию и практику по блоку, что позволяет создать ситуацию успеха!

На каждом уроке внедрена балльно-рейтинговая система как комплекс мотивационных стимулов, среди которых своевременная и систематическая оценка результатов труда ученика в точном соответствии с реальными достижениями. И данная система предполагает, что на каждом уроке оценивается каждый вид деятельности каждого обучающегося.

В балльной системе используются все баллы (от 1 до 5) стандартной школьной оценки.

В основу контроля за эффективностью образовательного процесса положены 5 последовательных уровней его итогов.

1-й показатель степени обученности – *«различие»*, когда ученик на уровне знакомства распознаёт информацию и получает за это 1 балл.

2-й показатель – *запоминание* с выставлением 2 баллов.

3-й показатель – *понимание* – и это 3 балла

4-й показатель – *сформированы* базовые умения и навыки, и ученик получает 4 балла.

5-й показатель – *перенос знаний, умений, навыков* в нестандартную ситуацию с выставлением максимальных 5 баллов.

Результаты блока контроля – это оценочные баллы, соответствующие школьной отметке, где каждый балл есть определённый объём знаний обучающихся. Достоверность оценки подтверждается накопляемостью и выходом на высшую ступень обучения.

Ученики имеют право: на ошибку, консультационное право, право свободного выбора домашних и классных заданий, выбора вида зачёта, получение и использование накопительных баллов.

Результативность. Балльно-рейтинговая система оценивания знаний позволяет создать максимально комфортную среду обучения, позволяет перевести учебную деятельность обучающихся из необходимости во внутреннюю потребность. Учитель выстраивает индивидуальную образовательную траекторию каждого ученика, что позволяет в соответствии с индивидуальными особенностями осуществлять выбор учеником возможных вариантов и форм овладения математикой. Данная система позволяет мне расширить общение, лучше ориентироваться в интересах и потребностях обучающихся, знать и учитывать их индивидуальные особенности.

Непременная составляющая современных федеральных государственных образовательных стандартов – внеурочная занятость обучающихся и в связи с этим в контексте индивидуального сопровождения выстраиваю проблемно-познавательные программы своих учеников.

В основе каждой программы лежат следующие принципы:

– выявление интересов ученика к определённой области знаний и научным проблемам;

– вовлечение в активную научно-исследовательскую и олимпиадную деятельность;

– мотивация на результативную деятельность;

– выстраивание программы по вертикали: средняя школа – старшая школа – вуз.

На каждом этапе необходимо показывать ребёнку важность и значимость его достижений, сочетая работу по подготовке к олимпиадам с научными исследованиями. Результат – сознательный выбор профессии, а не сиюминутное решение о приобретении очередной модной специальности.

Представляю вашему вниманию результаты поступления в вузы моих выпускников 2021 г., которые изучали математику по данной технологии.

Таблица 2

Группа	Бюджет	Институт математики и информационных технологий
29-41	94 %	7 чел.
29-11	100 %	8 чел.

Главная идея проблемно-познавательных программ моих учеников: научное знание и мастерство ребёнок со школьной скамьи должен взять с собой в студенческие годы, где на качественно новом уровне могут быть продолжены научные исследования.

Метапредметность и межпредметный характер. Любой педагог может сам составлять лекцию по укрупнённой единице материала (главе, разделу и т. д.) по своему предмету. Выстроить систему контроля. Составить «Листы открытого учёта знаний».

Без сомнения, результат реализации индивидуальных проблемно-познавательных программ очень весом:

во-первых, обретается столь желаемая современным образованием междисциплинарность;

во-вторых, в процессе разворачивания таких программ создаётся необходимый для общества стиль научного мышления.

Блочно-модульная технология обучения – это педагогика сотрудничества. Учитель и ученик едины. У них единые цели. Они вместе делают одно общее дело, которое одинаково значимо и для ученика, и для учителя. Они уверены в успехе, они уважают друг друга. Блочно-модульная технология – направляющий вектор успешности в обучении выпускника!

М. Н. Матчишина
МБОУ «СОШ № 5» г. Усолье-Сибирское

ИГРОПРАКТИКА НА УРОКАХ

Фраза учителя в начале урока «А сегодня мы будем играть!» приводит в восторг, мотивирует и с первой секунды заставляет слушать вас любого, будь то отличник или не очень любящий ваш предмет ученик. Конечно, на каждом уроке мы играть не можем, а вот закреплять или проводить предпраздничный день вполне реально. Очень хорошо игры помогают и ввести новую тему, хотя здесь надо быть аккуратным и очень ответственно подойти к разработке и проведению игры.

В своей статье я хочу рассказать о некоторых видах игр, которые использую на своих уроках.

1. Интерактивные упражнения в сервисе LearningApps

LearningApps – это бесплатный онлайн-сервис на русском языке, на котором представлено много интересных видов упражнений в игровой форме. С его помощью можно самостоятельно составлять приложения с целью проверки и закрепления уже полученных знаний, а можно использовать готовые разработки. Они распределены по предметным областям. Но поверьте, создав одно упражнение, вы не сможете остановиться.

Плюсы:

- Создаются легко и просто!
- Можно создавать свои упражнения!
- Можно пользоваться чужими!
- И наконец, пусть ученики делают их за вас ☺!
- Эти упражнения позволяют закреплять тему!
- Пользуйся ими в случае учебного форс-мажора!

Минусы:

Минус только в том, что не указывается количество ошибок. Но к конечному результату приходят только те, кто выполнил все задания правильно.

Чтобы посмотреть, как выглядят такие упражнения, я создала «очень сложный» комплекс упражнений.

Пройдите его по ссылке или QR-коду, улыбнитесь и заинтересуйтесь.
https://learningapps. org/watch?v=pzcmo98b222

Инструкция по работе с данным сервисом есть на моём канале. Рекомендую посмотреть. Посмотреть его можно по ссылке или QR-коду https://youtu.be/supYGXTz_Ec

2. Игра живого действия

Игра живого действия – это игровой процесс, который позволяет проверить эффективность привычных жизненных позиций или попробовать новые. Во время игры живого действия можно удовлетворить свои потребности в лидерстве и умении принять важные решения.

Чаще всего в таких играх не нужны атрибуты. Достаточно презентации или просто учебной доски. Примеры таких игр:

- Тема «Финансовая пирамида» на уроках по финансовой грамотности. Главным атрибутом были деньги из монополии. Один из учеников (самый общительный) определяется как организатор пирамиды, он уговаривает вступить в его «прибыльное дело». Учитель является его помощником и бухгалтером. Ведёт расчёты с вступившими в пирамиду ребятами. Получается доступно, понятно и весело. Игра длится 10 минут.
- Тема «Единицы измерения» (в математике и информатике). Суть игры в том, что надо выстроить 3 пирамиды из единиц измерения в порядке возрастания, начиная с маленькой. Наверху данной пирамиды расположить звезду, которая означает завершение. Игра стратегическая, сложная, затягивающая.

Играют команды по 5 человек. Команда противников может разбить чужую звезду, тем самым отодвигая их победу. В таком случае игрок, разбивший звезду пропускает следующий ход. Также следующий ход пропускает и игрок, поставивший последнюю единицу измерения. Играем по этапам. На каждом этапе, каждый член команды пишет в своей тетради действие (единица измерения, звезда или её разбитие). По сигналу учителя команда называет действия каждого ученика, а учитель фиксирует их на доске (строит пирамиды). Каждый этап, игру начинают разные команды (порядок определяется в начале игры, т. к. от этого у некоторых может быть своя стратегия). Побеждает команда, быстрее всех, выстроившая самые высокие пирамиды со звездой наверху. Игра длится 30–40 минут.

- Тема «Чётные числа». Игра называется «Не скажу». Дети по порядку считают, каждый называет число, но вместо чётного числа ребёнок должен сказать: «Не скажу». А эти числа учитель записывает на доске. Также эту игру можно использовать для таких тем, как: простые числа или свойства деления на 2, 3, 5, 9, 10 и тд.

- Игра из информатики «Чёрный ящик» на поиск закономерностей. Учитель придумывает какую-либо закономерность, детям её не озвучивает. Задача ребят понять закономерность и узнать, какое число прячется под знаком вопроса.

Например.

Вход	12	24	32	100
Выход	3	?	8	25

Конечно, это только часть игр. На просторах интернета существует большое разнообразие. В игры надо втянуться самому, потом они сами находят тебя или ты с лёгкостью начинаешь их придумывать. Дерзайте! Творите! Изменяйте уже готовые игры! И ваши уроки станут интереснее!

М. Н. Полякова
МБОУ г. Иркутска «СОШ с углубленным изучением отдельных предметов № 14», г. Иркутск

МЕТОД СОУЧИТЕЛЬСТВА (ТЬЮТЕРСТВА) ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ВНЕКЛАССНОГО ЗАНЯТИЯ «ФЕСТИВАЛЬ СТРАТЕГИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ»

2023 год в нашей стране объявлен годом наставника. Данное занятие построено с использованием метода соучительства (тьютерства). В последнее время этот метод как обучающий получил широкое развитие. Основным принципом этого метода является обращение за информационной или практической помощью к более опытному человеку по вопросам, касающимся конкретной темы или области исследования. Положительная черта такого метода заключается в получении учащимся адресной поддержки и повышения опыта, как в исследуемой области, так и в межличностном взаимодействии. С другой стороны, данный метод выполняет большую профориентационную работу, дает обучающимся возможность публичного выступления перед аудиторией и возможность попробовать себя в роли наставника.

Задача – это ситуация, в которой необходимо принять решение, но путь к этому решению заранее неизвестен. Очень часто задают вопрос, а где эта задача применяется в жизни? Это очень правильный вопрос. Да, базовые задачи можно переложить на тему быта, купли-продажи и т. д. А нужны ли трудные задачи? А те, которые сию минуту не приложатся к нашим реалиям? Но ведь результат, мыслительные ходы, которые остаются в сознании ребёнка тоже нужны, следовательно, нужны стратегии мышления. Об этом наше занятие.

При планировании занятия было решено провести входящее тестирование с целью определения, знакомы ли данные стратегии учащимся. Далее были подобраны задачи базового уровня и задачи повышенного уровня сложности по текстам итоговых тестов. Составлена программа для проведения занятия. Из учащихся 9-х классов были подготовлены ведущие – лекторы, наставники. Выделено время на занятие в количестве двух академических часов.

Выбор данной формы проведения внеклассного занятия позволил:

– повторить учащимися различные способы решения задач;

– узнать применение данных стратегий в жизненных ситуациях;

– выработать у учащихся старших классов умения выступления перед аудиторией;

– ощутить себя в роли наставника

Для эффективного решения проблемы усвоения данной темы был разработан следующий ход занятия:

Тема. Стратегии решения математических задач.

Обучающая цель. Отработать умения учащихся решать разноуровневые задачи по разным темам различными способами.

Учебные задачи:

- Научить учащихся распознаванию ситуаций, требующих использования определённого типа задач.
- Отработать объяснение решения задач в затруднительной ситуации
- Отработать навыки работы в учебных группах.

Оборудование

Интерактивная доска, проектор, программное обеспечение, презентации.

Работа учащихся – консультантов

Ведущие рассказывают теорию и показывают на экране ход решения и оформление задач. Далее после каждой объяснённой задачи учащиеся в группах самостоятельно прорешивают задачу разными способами. Во время решения наставники работают со своими группами (три и более человек), помогая справиться с затруднительной ситуацией, проверяя записи **в тетрадях**. После успешного прохождения базового уровня наставники предлагают аналогичные задачи для самостоятельного решения.

По окончании занятия учащиеся получают сертификат об успешном прохождении тренинга по решению задач различными способами по разным темам.

При анализе входного и выходного тестирования знаний было выявлено значительное улучшение качественных показателей. Школьный психолог, обобщая данные анкет – листов обратной связи, отметил, что данное занятие с привлечением наставников способствовало формированию тёплой доверительной, рабочей атмосферы, наставники понятно и доступно объясняли материал, дружески относились к своим курсантам. Эксперимент был всеми признан успешным.

Таким образом, данная работа является эффективной и значимой для учащихся. Она позволяет расширить возможности внеклассной работы, раскрывая ценность взаимодействия учащихся, играющих разные роли в учебно-воспитательном процессе.

Приложение

При подготовке к занятию каждая команда наставников должна подготовить жизненную ситуацию по данной стратегии, задачу и несколько способов её решения с использованием стратегии.

Стратегия действия от обратного

Жизненная ситуация: необходимо быть на уроке в 7:55. От дома до школы 25 минут. Когда нужно выйти из дома? (За 25 минут + 5 минут на раздевалку => не позднее 7:25.)

№ 1. Мама испекла печенье на полдник для Маши. В первый день Маша съела половину всего испеченного печенья. На второй день она съела половину того, что осталось. На третий день – одну четверть остатка, а на четвертый – одну треть. На пятый день она довольствовалась половиной того, что осталось, а на шестой день доела одно последнее печенье. Какое количество печенья испекла мама Маши? [1]

Стандартное решение

Пусть x – начальное количество печенья.

День	Было	Съедено	Остаток
1	x	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
2	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{4}$	$\frac{x}{4}$
3	$\frac{x}{4}$	$\frac{x}{16}$	$\frac{3x}{16}$
4	$\frac{3x}{16}$	$\frac{3x}{16}\left(=\frac{x}{16}\right)$	$\frac{x}{8}$
5	$\frac{x}{8}$	$\frac{x}{16}$	$\frac{x}{16}$
6			

Таким образом, $\frac{x}{16}=1$, $x = 16$.

Ответ: Мама Маши испекла 16 печений.

Нестандартное решение:

Начнем с конца задачи и пойдем в обратном порядке.

В шестой день Маша съела последнее печенье, значит было 1 печенье;

В день 5 она съела ½, значит было 2 печенья;

В день 4 она съела 1/3, значит было 3 печенья;

В день 3 она съела ¼, значит было 4 печенья;

В день 2 она съела ½, значит было 8 печений;

В день 1 она съела ½, значит было 16 печений.

При вычислениях от обратного необходимо изменять используемые операции на «обратные». Ответ: 16 печений.

№ 2. Имея два уравнения, найдите $x + y$:

$6x + 7y = 2007$;

$7x + 6y = 7002$. [2]

Стандартное решение:

$42x + 49y = 14049$;

$42x + 36y = 42012$.

$13y = -27963$

$y = -2151$

$6x - 15057 = 2007$;

$6x = 17064$;

$x = 2844$.

Ответ: $x + y = 693$

Нестандартное решение

Уравнения в задаче обладают симметрией. Нужно найти не числа, а их сумму.

Сложим эти уравнения: $13x + 13y = 9009$

Разделим обе части уравнения на 13: $x + y = 693$. Это и есть ответ.

Стратегия: анализ экстремальных ситуаций

Иногда, чтобы решить задачу, полезно присвоить одним переменным экстремальные значения, а другие переменные сохранить постоянными.

Мы зачастую задаем себе вопрос: «А что плохого может произойти в крайнем случае?» Ситуация: идет дождь, вы без зонта. Что лучше: бежать во время дождя или нет? Анализ экстремальных ситуаций показывает, что очень медленное движение увеличивает время, которое мы находимся под дождем, а экстремально медленное движение, скажем, с нулевой скоростью, приведет к тому, что вы промокнете до нитки.

Таким образом, чем быстрее мы будем двигаться, тем меньше намокнем. Вот так экстремумы помогают решать задачи.

№ 3. Автомобиль едет по шоссе с постоянной скоростью 55 км/ч. Водитель замечает другой автомобиль на расстоянии 0,5 км позади. Второй автомобиль обгоняет первый 1 минуту спустя. С какой скоростью двигался второй автомобиль, если считать, что она была постоянной? [3]

Стандартное решение:

Скорость x время = расстояние		
55	$\frac{1}{60}$	$\frac{55}{60}$
x	$\frac{1}{60}$	$\frac{x}{60}$

$$\frac{55}{60} + \frac{1}{2} = \frac{x}{60}$$

$55 + 30 = x$

$X = 85$

Ответ: 85 км/ч

Нестандартное решение:

Первый автомобиль движется медленно – 0 км/ч.

Второй автомобиль за 1 минуту догонит первый через 0,5 км.

Таким образом второй автомобиль должен ехать со скоростью 30 км/ч.

Так как первый движется 55 км/ч, то второй 85 км/ч.

Ответ: 85 км/ч.

№ 4. В 40 почтовых ящиков в местном почтовом отделении каждое утро кладут письма. Однажды почтальон разложил по этим ящикам 121 письмо. Закончив работу, он обнаружил, что в одном ящике больше писем, чем в любом другом. Какое наименьшее количество писем может находиться в этом ящике? [4]

В ящиках находится одинаковое количество писем: 120 : 4 = 3 (письма)

Добавим дополнительное письмо.

3 + 1 = 4.

Ответ: 4 письма.

Стратегия: визуальное представление

Многие люди лучше воспринимают информацию визуально, чтобы понять происходящее, им нужна картина, а не просто слова. Визуализация – очень сильный метод, помогающий вникнуть в данную ситуацию. Например, когда нужно объяснить, как найти чей-то дом, мы используем навигатор. В журналах и газетах постоянно используются графики и другие визуальные инструменты для сравнения или противопоставления ситуаций. Когда вы покупаете мебель в Икеа и должны собрать ее сами, в руководстве производителя помимо письменных инструкций обычно приводятся рисунки.

Девиз данной стратегии – лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать.

№ 5. В клетке сидят фазаны и кролики. Всего у них 35 голов и 94 ноги. Определите число фазанов и число кроликов. [5]

Стандартное решение:

Составим уравнение

$4x + 2(35 - x) = 94$, где x – число кроликов.

ОТВЕТ: 12 кроликов, 13 фазанов.

Нестандартное решение:

, 13 фазанов. 35 · 2 = 70 (ног задних)

94 – 70 = 24 (ног передних)

24 : 2 = 12 (голов кроликов)

35 – 12 = 13 (голов фазанов)

ОТВЕТ: 12 кроликов

Стратегия решения более простой аналогичной задачи [2]

Некоторые задачи на первый взгляд кажутся чрезвычайно сложными. Ввести в заблуждение могут, например, очень большие числа. Даже условие задачи способно поставить в тупик. Отличный подход – упростить задачу, так чтобы она осталась эквивалентной исходному варианту. Решая упрощенную версию, мы получим представление о том, как справиться с исходной задачей.

№ 6 Дано $\frac{1}{x+5}=4$. Чему равно $\frac{1}{x+6}$?

Стандартное решение:

Решаем уравнение $\frac{1}{x+5}=4$. Находим $x=-\frac{1}{19}$.

Подставляем x в выражение, получаем ответ.

Ответ: 0,8

Нестандартное решение:

Возьмем обратные величины обеих сторон уравнения $\frac{1}{x+5}=4$. Получим $\frac{1}{4}=x+5$.

Прибавляем к обеим частям уравнения 1.

Находим $\frac{5}{4}=x+6$

Возвращаемся к обратной величине и получаем ответ 0,8.

Стратегия распознавания закономерности

Одной из самых распространенных применений математики – предсказание того, что происходит регулярным образом. Например, сколько булочек на обед нужно для одного класса, для двух классов… А для десяти классов?

Закономерности широко используются полицией. Если происходит серия преступлений, то следователь ищет стиль поведения преступников. Врач обычно смотрит на характер поведения пациента, чтобы определить его заболевание.

Найдите цифру в разряде единиц числа 8^{19}, не прибегая к помощи калькулятора [3].

Нестандартное решение:

$8^1=\underline{\mathbf{8}}$ $8^5=3276\underline{\mathbf{8}}$ $8^9=13421772\underline{\mathbf{8}}$

$8^2=6\underline{\mathbf{4}}$ $8^6=26214\underline{\mathbf{4}}$ $8^{10}=107374182\underline{\mathbf{4}}$

$8^3=51\underline{\mathbf{2}}$ $8^7=209715\underline{\mathbf{2}}$ $8^{11}=858993459\underline{\mathbf{2}}$

$8^4=409\underline{\mathbf{6}}$ $8^8=1677721\underline{\mathbf{6}}$ $8^{12}=6871947673\underline{\mathbf{6}}$

По закономерности делаем вывод: ответ – 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарева Н. Д. Олимпиадная математика. Арифметические задачи с решениями и указаниями. 5–7 классы. М. : Лаборатория знаний, 2020. 252 с. : ил. (ВМК МГУ – школе).

2. Позаментье А. Стратегии решения математических задач: Различные подходы к типовым задачам / пер. с англ. В. Ионова. М. : Альпина Паблишер, 2022. 223 с.

3. Семендяева Н. Л. Олимпиадная математика. Задачи на целые числа с решениями и указаниями. 5–7 классы. М. : Лаборатория знания, 2020. 272 с. : ил. (ВМК МГУ – школе).

4. Фарков А. В. Математические олимпиады: методика подготовки. 5–8 классы. М. : ВАКО, 2015. 176 с. (Мастерская учителя математики).

5. Шевкин А. В. Текстовые задачи в школьном курсе математики. 5–11 классы. М. : Илекса, 2018. 246 с.

С. В. Присакарь
МКОУ «СОШ № 3 г. Бодайбо», г. Бодайбо

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТАПРЕДМЕТНЫХ ПРОБЛЕМНЫХ СИТУАЦИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Константин Дмитриевич Ушинский писал: «Голова, наполненная отрывочными, бессвязными знаниями, похожа на кладовую, в которой все в беспорядке и где сам хозяин ничего не отыщет; голова, где только система без знаний, похожа на лавку, в которой на всех ящиках есть надписи, но в ящиках пусто». Эти слова актуальны и в наше время. Ушинский утверждал, что обучение должно быть сознательным, а ученик не просто зубрит правила, а обязательно думает о применении этих знаний – где что может пригодиться в будущем. Поэтому в наши дни, необходимо не только учить учиться, но и учить применять полученные знания в жизненных ситуациях. Современный урок, это не просто урок с изучением новых правил, формул, законов, аксиом. Это прежде всего урок-практикум, урок-путешествие, урок-дискуссия, урок-импровизация, урок-квест. Собираясь на урок, необходимо продумать и поставить проблему так, чтобы заинтересовать всех от начала урока и до самого его логического завершения.

В разработке занятий мы опирались на положения метапредметного подхода, который заключается в направленности обучения на освоение универсальных способов действий. Приведем несколько примеров из разработок автора.

1. Ситуации неопределенности

При изучении темы «Сравнение десятичных дробей» учащимся можно предложить следующую информацию.

В России Национальный ***день донора*** *в 2023 году отмечается 20 апреля. В мероприятиях участвуют* ***доноры****, медицинские работники по забору крови,* ***донорские*** *организации.*

У доноров нужно брать кровь, соблюдая некоторые правила. Для каждого человека норма сдачи своя. Если взять меньше, то крови не хватит будущему пациенту. Если взять больше, то человеку будет плохо.

Сколько крови возьмём у каждого?
Мужчина 24 года
543,66 мл <<543,68 мл*
Мужчина 44 года
501,00001 мл <<501,00003 мл*
Женщина 18 лет
404,044м л <<404,046 мл*

В данной ситуации, учащиеся понимают, что им необходимо знать правило сравнения десятичных дробей.

Загрязнение рек происходит уже более двух тысяч лет. В России около 3 млн рек. И если ранее эту проблему люди не замечали, то сегодня она достигла глобального масштаба. В Байкал впадают 336 рек и ручьёв. Самые крупные из них: Верхняя Ангара, Баргузин, Турка, Снежная. *Наиболее крупная река, впадающая в озеро Байкал – это Селенга. За год она приносит озеру около 30 кубических километров воды. Вода реки очень сильно загрязнена. Загрязненная вода Селенги поступает в озеро и ухудшает его состояние.* Из озера вытекает единственная река – Ангара.

Подавляющий объем загрязненных сточных вод Иркутской области приходится на бассейн Ангары – 93 %, причем 85 % их выпускается непосредственно в Ангару и ее водохранилища. Байкал обеспечивает 20 % всех запасов пресной воды на планете. В 2019 году годовой объем канализационных стоков в городе Бодайбо, составил более 1 млн. 200 тысяч кубических метров, при пропускной способности очистных сооружений 766 тыс. куб. м. Неочищенные воды поступают в реку Витим рыбохозяйственного значения. Каждый год человек загрязняет 2 % всех рек. Сколько всего рек загрязняет человек в год в России?

Предполагается работа с текстом, с информацией, счётная работа. Заполнение таблицы по наводящим вопросам. Формулировка темы урока и постановка проблемы при изучении новой темы.

2. Ситуации неожиданности

Ситуации неожиданности вызывают большой интерес и удивление, оживленный обмен мнениями.

При изучении темы «Формулы сокращённого умножения», учащимся можно предложить найти значение выражений, потратив как можно меньше времени.

1) -24,6+78,9+24,6–78,9 – 13	Учащиеся вспоминают про сложение противоположных чисел
2) $\frac{45 \cdot 18 \cdot 34 \cdot 10}{180 \cdot 90 \cdot 17}$	Учащиеся вспоминают про сокращение дробей
3) $(\frac{23}{123} \cdot 5\frac{8}{23})^{34}$	Учащиеся вспоминают про умножение двух взаимно-обратных дробях и возведение в степень числа 1
4) $\frac{776^2-775^2}{1551}$	Учащиеся не понимают, как легко и быстро найти значение предложенного выражения

И вот проблема поставлена, рассматриваются различные версии.

При изучении десятичных дробей учащимся 5-го класса предлагается изобразить отрезок длиной 10 см, 4 см 5 мм, 6,5 см. Проблема поставлена, как изобразить 6,5 см. А затем организуется работа в группах с карточками.

Выразить в см	*Выразить в м*	*Выразить в дм*	*Выразить в кг*
23 мм	*23 см*	*56 см*	*2 г*
2 дм 3 см 5 мм	*23 дм*	*3 мм*	*23 г*
4 мм	*23 мм*	*4 см*	*12 кг 678 г*
3 м 3 мм	*1 км 35см*	*12 м 34 см*	*4 ц 47 г*
12 м 12 мм	*34 км 3 м 45 см*	*56 м 8 см 9 мм*	*23 т 98 г*

3. Ситуации опровержения

Школьникам предлагается опровергнуть или подтвердить правильность рассуждений. Чтобы проанализировать готовое решение, детям необходимо сначала самим правильно решить задачу. Проанализировав, сравнив, они приходят к нужному выводу.

В прошлом году Елена составила личный финансовый план, в результате чего она смогла накопить приличную сумму денег. Елена решила грамотно вложить свои сбережения и приумножить их. Она распределила все свои деньги между банковским вкладом и вложениями на фондовом рынке в отношении 14:6. Часть денег, которую Елена вложила на фондовый рынок, она также распределила на группы – вложение в акции и вложение в облигации в отношении 7:13. Какой процент от общего капитала Елены составляют вложения в облигации?

Решение:

14/20 = 0,7 – вложения Елены в банковский вклад.

6/20 = 0,3 – вложения в инструменты фондового рынка.

14/20 = 0,7. 6/20 = 0,3. Таким образом, вложения Елены в фондовый рынок составляют 30 % от всех инвестиций. Инвестиции в акции составляют 7/20, т. е. 35 % от всех вложений в инструменты фондового рынка. В свою очередь инвестиции в облигации составляют 13/20, т. е. 65 % всех вложений в инструмент фондового рынка. Тогда

$0,3 \cdot 0,65 = 0,195 = 19,5$ %.

Учащиеся и свои варианты предлагают, и анализируют решение, предложенное учителем.

4. Ситуации предположения

Можно выдвинуть предположение и предложить проверить его на практике. Данную ситуацию можно применять при изучении геометрии. Предположение о сумме углов четырёхугольника.

Уместным будет и провокационный вопрос: «В каком четырёхугольнике, сумма внутренних углов больше – в параллелограмме или трапеции?» и проверить все на практике (учащимся предлагается практическая работа).

При изучении тригонометрических элементов на геометрии можно также задать вопрос: «Как вы считаете, что больше $\sin 30^\circ$ или $\cos 60^\circ$?» и проведя доказательство, приходят к выводу о равенстве.

Таким образом, на уроке происходит формирование ключевых компетенций: информационной (способ получения и обработки информации на самом высоком уровне), коммуникативной (работа в группе по извлечению информации) и компетенции личностного самосовершенствования. Каждый урок мы начинаем с маленькой проблемки не зависимо от возраста учащихся (5-й класс или 11-й).

В результате создания проблемной ситуации и ведения проблемного диалога, учащиеся сами формулируют цель урока. А значит, они приобретают навыки целеполагания и планирования дальнейшей деятельности.

Метапредметный урок:	Личностное совершенствование учащегося через его познавательное развитие
	Формирование метапредметных и универсальных учебных действий с учетом реальных потребностей и интересов в общении и познании.
	Предполагает интеграцию не только на уровне содержания, но и на уровне организации способностей к определенным типам деятельности, направленным на добывание знания самостоятельным путем. Результатом такого процесса является овладение определенной способностью, применимой в разных областях знания и жизнедеятельности.
	Применение полученных знаний и умений на других уроках.
	Развитие мышления и профессионализма учителя.
	Формирование мыслящего человека, как учителя, так и ученика

Приведу лишь несколько примеров из своей практики.

При изучении темы «Проценты» включаю различные задания.

Папа Вада открыл депозит в банке, положив на него 100 000 рублей под 15 % годовых с начислением процентов в конце срока вклада. Через сколько лет папа Влада накопить 145 000 рублей?

Учащиеся в процессе работы сами «вкладывают» деньги в банк и рассчитывают свой реальный доход от вложенного капитала. А банк им показывает номинальный доход. У детей возникает законный вопрос – в чём причина? И они заинтересованно ищут ответ на него.

Учащиеся, предлагают различные способы решения. При решении таких задач мы разбираем такие понятия, как наценка, инфляция, доход, вклад, скидка.

Самым интересным для ребят является расшифровка темы урока.

<table>
<tr><td>Создание квеста на платформе Genially. Где учащиеся сами разгадывают тему урока.</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Создание диалогового тренажёра в Online Test Pad. Где учащиеся ведут диалог с онлайн учителем.</td><td>

</td></tr>
</table>

Различные кодировки, крипто-граммы, анаграммы.	Bwicfcerktpsicva tgpweyqgrolndbhzirkna. (убираем английские буквы и ставим цель урока).

При изучении темы «Масштаб» использую творческие задания.

На рисунке 1 изображены размеры участка в 10 соток. На рисунке 2-примерный план участка. Придумайте свой план участка в 10 соток, изобразите в свободном поле и укажите на нём клумбу. Отдельно нарисуйте схему клумбы, используя дополнительную информацию, составьте калькуляцию.

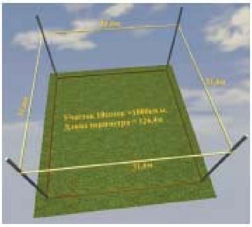


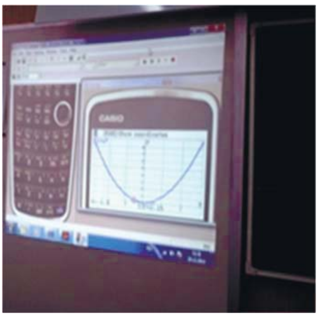
Рис. 1


Рис. 2

В каждой из версий представлен особый способ решения задачи. В каждом из способов задействован свой набор понятий.

При изучении темы «Площадь круга. Длина окружности» использую также творческие задания.

Работа в группах. Ребята делают из бумаги клумбу круглой формы. Здесь и творчество, и качество, и групповая работа. *Рассчитать количество семян (в граммах) на посадку. Выбрать магазин, где можно приобрести семена по меньшей стоимости. Затем необходимо рассчитать количество удобрения для выращивания цветов (если на 1 м^2 уходит 20 г)* *Найти длину ограждения клумбы и т. д.*	



На уроках алгебры в 7-м классе при изучении темы «Функции и их графики» использование графического калькулятора CASIO и эмулятора имеет большой потенциал в организации учебной деятельности.

Обучающимся предлагаются задания такого рода.

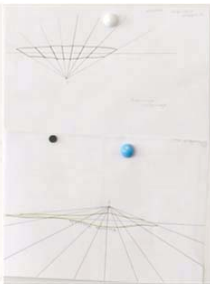
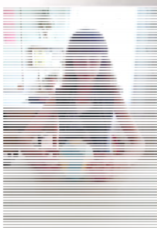
Открыв чат в телефоне «Погода в городе Бодайбо» 19 января в 6:00 мы увидели сообщение, что зафиксирована температура воздуха -50 °С. Спустя час мы увидели, что температура резко упала до -54 °С. Но по прошествии двух часов, столбик термометра показывал уже -48°. После чего воздух начал прогреваться. И уже к 16:00, температура достигла -40 °С. А к вечеру температура в 18:00 упала, до -45 °С, а в 20:00 достигла отметки, которая была в 9:00. Но падение температуры на этом не остановилось и в 22:00 воздух остыл до -49 °С. Такая температура, продержалась до полуночи.

По описанию постройте схематично график изменения температуры в течение суток с 10:00 до 00:00.

На уроках учащиеся используют калькулятор для быстрого заполнения таблицы и построения большего числа различных функций в режиме TABLE.

При работе с чртёжными инструментами также необходимо поставить задачу неожиданности. Рисуем различные линии, собираем многогранники и проводим исследования.




При решении задач, вызывающих предложенные проблемные ситуации, формируются метапредметные навыки обучающихся, раскрываются прикладные аспекты математики, расширяется кругозор школьников, как в математике, так и в других областях.

Метапредметный подход помогает развивать у учащихся целеустремлённость, помогает создать ситуацию успеха для каждого ученика. Тем самым позволяет ответить на вопросы что это, зачем, почему, как, для чего, надо ли?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Геометрия. 7–9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. М. : Просвещение, 2010. 384 с.

2. Громыко Ю. В. Метапредмет «Проблема» : учеб. пособие для учащихся ст. кл. М., 1998. 376 с.

3. Фоменко И. А. Создание системы формирования нового содержания образования на основе принципов метапредметности. URL: fomenko.edusite/p35aa1.html/.

4. Лоповок Л. М. Тысяча проблемных задач по математике. М. : Просвещение, 1995.

И. А. Просандеева
МОУ Лицей, г. Черемхово

ЭЛЕКТРОННЫЙ ТРЕНАЖЕР И ЦИФРОВОЙ КВЕСТ КАК СОВРЕМЕННЫЕ ДИДАКТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА, СОЗДАННЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

В настоящее время одним из ключевых элементов образования является проектная деятельность учащихся, в процессе которой происходит развитие творческого, научного, практико-ориентированного мышления. Использование методов проектов создает условия для более полной самореализации учащихся в познавательной деятельности, что повышает их мотивацию к обучению, способствует развитию самостоятельности и ответственности, умений планировать, оценивать и корректировать результаты своей работы.

В современном быстро меняющемся мире меняются и интересы детей. Дидактические средства, используемые в учебной деятельности, тоже должны учитывать особенности восприятия современного «цифрового поколения». Именно поэтому сейчас востребованы инструменты, которые позволяют сделать образовательный процесс для ребят не только полезным, но захватывающим, интерактивным, организованным в привычной для них среде обитания. Создание и использование электронных тренажеров и образовательных цифровых веб-квестов самими учащимися – один из таких инструментов.

В МОУ Лицей г. Черемхово накоплен определенный опыт создания учащимися в рамках проектной деятельности цифровых интерактивных тренажеров по различным предметам, темам, выполняющим роль дидактических средств в процессе самостоятельной подготовки учащихся к ГИА. Представляю вашему вниманию некоторые из них.

1. Проект «Создание электронного тренажера по теме «Вписанные и центральные углы в окружности (задания уровня ОГЭ и ЕГЭ)».

В процессе создания тренажера учащийся проделал большую самостоятельную работу по поиску и классификации материала, как теоретического, так и задач различного уровня сложности.

Данная проектная работа, безусловно, расширяет математический арсенал средств, используемый в решении геометрических задач. Материал, используемый в работе, пригодится для решения задач в будущем, позволит применять методы и правила для решения нетрадиционных задач, именно на вписанные и центральные углы. Учащимся разработан алгоритм работы тренажера, первым шагом которого является выбор задания определенного уровня сложности (участнику начисляются баллы), если задача оказалось сложной для решения, участнику предлагается повторить теорию по решению этой задачи, можно воспользоваться подсказкой (указание на теорему, которая является ключом для решения задачи), сверить свой ответ с образцом.

Рис. 1

Тренажер разработан на основе электронной презентации Power Point с системой гиперссылок, был протестирован в 11-х классах, получены положительные результаты апробации.

Практическая значимость данной проектной работы заключается в том, что созданный электронный тренажер может служить очень хорошим материалом для систематизации темы «Вписанные и центральные углы». Кроме того, умение создавать электронный тренажера актуализирует в сознании учащегося междисциплинарные связи. Данная проектная работа была удостоена дипломом призера на Всероссийском конкурсе-выставке научно-технологических и социальных предпринимателей «Молодежь. Наука. Бизнес», прошедшем в рамках федеральных окружных соревнований Сибирского и Дальневосточного федеральных округов «Шаг в будущее» (г. Барнаул, 2021 г.)

Проект: «Веб-квест «По дорогам показательной». Продукт проекта создан в формате веб-квеста для обобщения темы «Показательная функция» и может использоваться как элемент построения самостоятельной индивидуальной образовательной траектории старшеклассника в цифровой образовательной среде, поскольку данный веб-квест дает возможность учащимся проверить свои знания на разном уровне сложности. Участник может сразу начать с прохождения маршрута высокого уровня сложности, а может поэтапно пройти все три маршрута от базового до высокого уровня сложности.

Проект междисциплинарный, выполняя практические задания, учащиеся также актуализируют свои знания по географии, узнают много интересного из истории морского флота, даже учатся различать звания военно-морского флота. Проект дал возможность автору получить навыки сайтостроения на сайте российского хостинг-провайдера «МакХост»; освоить такие приложения, как: Google Формы, LearningApps; актуализировать знания по теме «Показательная функция».

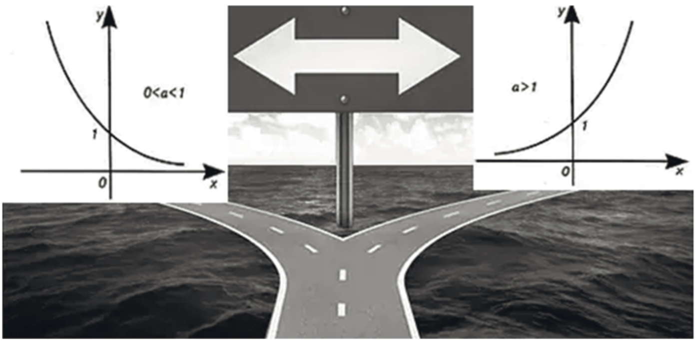


Рис. 2

Ценно и то, что при выполнении веб-квестов учащиеся не получают готовых ответов или решений, они самостоятельно решают поставленную перед ними задачу.

Данный проект отмечен Дипломом I степени на Региональном дистант-форуме талантливой молодежи «Шаг в будущее, Сибирь!» в 2020 г.

Созданные учащимися интерактивные продукты проектной деятельности используются в самостоятельной учебной деятельности для повторения и систематизации полученных знаний на уроках, доказали свою эффективность, поскольку являются практико-ориентированными, носят междисциплинарный характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Решение задач : учеб. пособие для 11 кл. общеобразоват. учреждений. М. : Просвещение, 1995.
2. Н. Я. Виленкин и др. Алгебра и математический анализ для 11 класса. М. : Просвещение, 1996.
3. Васильев А. В., Заз А. И. Математика. М. : МГТУ им. Баумана, 1998.
4. Кудаева Н. Б. Образовательная технология веб-квест // Виртуальный университет социальной сети nsportal.ru. URL:https://nsportal. ru/vu/fakultet-inostrannykh-yazykov/obrazovatelnaya-tehnologiya-veb-kvest/chto-takoe-obrazovatelnyy-veb
5. Власова А. П., Латанова Н. И., Евсеева Н. В.. Показательная и логарифмическая функции в задачах и примерах: учебное пособие [Электронный ресурс]. М. : МГТУ им. Баумана, 2010. URL: http://alexlarin.net/ege/2014/velc3.pdf

А. А. Самойленко
МОУ Гимназия им. В. А. Надькина , г. Саянск

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ МЕЖДУ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛОЙ И ОСНОВНОЙ И ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПРЕЕМСТВЕННОСТЬЮ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Хотелось бы начать свой доклад с понятия «преемственность». Что же это такое? Если обратиться к толковому словарю русского языка, и посмотреть значение данного слова, то преемственность – это взаимосвязь различных этапов или периодов развития, а также последовательная передача чего-либо от одного к другому [1]. Преемственность в обучении в общеобразовательных школах и проблемы преемственности в преподавании между начальной школой и основной всегда существовали и существуют в настоящее время.

Взаимосвязь, которую мы называем преемственностью в обучении, проявляется том, что устанавливается нужная связь и верные соотношения между различными частями учебного предмета в школе на разных этапах и периодах его изучения. Также преемственность может проявляться в последовательности изложения, в системности расположения, в планомерности с изученным материалом и иметь опору на достигнутый учащимися уровень развития, обязательно должна присутствовать согласованность периодов и этапов воспитательной и учебной работы.

В организации самой преемственности в обучении существует ряд проблем, которые, в свою очередь, затрагивают все звенья системы образования, что у нас существует, и если говорить конкретно, то это переходы из дошкольного образовательного учреждения в начальную школу, далее из начальной школы в старшую школу и переходы из школы в профессиональные и высшие учебные заведения.

Наблюдая за учащимися, выпускниками 4-х классов, а именно за теми изменениями, которые присутствуют в их подготовленности, есть моменты, которые в первую очередь сигнализируют о наличии некоторых проблем, сказывающихся в дальнейшем на успешном усвоения обучающимися школьных материалов на начальном этапе при переходе в 5-й класс.

Данные проблемы, которые сформировываются в процессе работы классифицируются на три обобщенные группы:

1) организационно-психологические;
2) общеучебные навыки;
3) специальные математические навыки;

В группу ***организационно-психологических проблем*** можно отнести:

1) недостаточно быстрый темп урока, отсутствие подготовленных специальных материалов для сильных (либо одаренных) учеников, перенос большей части усвоения курса предмета на выполнение дома;

2) недостаточно сформировано четкое и начало урока и его окончание, отведение дополнительного времени на то, чтобы учащиеся могли выполнить письменные работы (сверх отведенного времени на урок);

3) несформированность у детей четкого представления об устном ответе и его оценивании на уроке математики (критерии). Учащиеся в начальной школе привыкли получать хорошие отметки за краткие односложные ответы.

Проблемы, которые связаны с вырабатыванием общеучебных универсальных навыков:

1) скорость письма недостаточно высокая (в том числе под диктовку);

2) внимание учащихся неустойчивое, оперативная память развита слабо, а именно она и отвечает за навык планирования наперед и способность сохранять в голове несколько последовательных шагов (алгоритм);

3) недостаточно сформированная техника чтения;

4) умение обобщать, находить закономерности;

5) недостаточно сформированная способность к анализу, способность быстро принимать решения;

6) недостаточно сформированное умение корректно и отчетливо формулировать мысли, строить умозаключения и делать правильные выводы.

Проблемы, которые имеют взаимосвязь с математическими умениями:

– не сформированы либо недостаточно сформированы умения извлекать суть и решать текстовые задачи;

– не сформированы либо недостаточно сформированы умения выполнять устные вычисления (на любом этапе работы);

– недостаточно развиты графические умения (при изучении геометрического материала).

В школьном курсе математики очень важна прочная база знаний, которая формирует надежную основу для дальнейшего обучения. Об этом и говорится в образовательных стандартах второго поколения, что необходимо изначально создать прочный фундамент для дальнейшего обучения, что выполнимо только при условии наличия преемственности между различными ступенями системы образования.

Проблема преемственности может возникать в связи:

– с недостаточно плавным изменением технологий, методов и содержания обучения, что вследствие приводит к падению успеваемости учащихся при переходе из начального блока школы в старший блок, росту тревожности и возникновению психологических трудностей;

– тем, что обучение в начальной школе не создает нужной готовности обучающихся к благополучному вовлечению в учебную деятельность более сложного уровня;

– существованием узкого понятия преемственности и непрерывности между этапом начальной и основной школы;

– тем, что не в полной мере учитываются возрастные психологические особенности 10–12-летних детей, которые перешагивают в подростковый период своего развития;

– отсутствием четких представлений о том, какие должны быть цели и результаты образования на этапе начальной и основной ступенях обучения.

Также в настоящее время существует такая проблема, как падение мотивации к обучению у учащихся, неэффективное использование современных цифровых технологий и сложности в работе с родителями.

Переходный период обучающихся из начальной школы в основную связан непосредственно с адаптационным периодом, который протекает у каждого ребенка по своему и у многих сопровождается повышением уровня тревожности. Учащиеся переводятся от одного учителя в начальной школе к нескольким учителям-предметникам, вместо одного кабинета, будучи привычным, появляется целая чужая кабинетная система и каждый учитель преподает свой предмет посвоему.

Чтобы адаптационный период проходил у ребенка успешно, важным этапом становится начало работы по преемственности начинать с 4-го класса.

Принципы работы по обеспечиванию и сохранности преемственности обучения математике между имеющимися ступенями обучения в школе:

1. Сохранение взаимопосещений уроков в начальной школе педагогами основной школы, чтобы учитель, который будет обучать далее, мог видеть определенные особенности класса и ребят в отдельности.

2. Организация посещений выпускников начальной школы на уроки математики в 5-е классы, экскурсии в кабинеты математики.

3. Организация посещений родительских собраний в начальной школе теми учителями-предметниками основной школы. Которые будут преподавать.

В качестве рекомендаций, которые можно дать всем участникам образовательного процесса, можно выделить следующие:

1. Уменьшить часть урока, которая отводится на беседы и другие малоэффективные методы работы на уроках на использование флеш-карт или иного раздаточного дидактического материала для отработки умений и навыков.

2. Привить умение школьникам начинать работать на уроке по звонку, сформировать умение поспешно включаться в выполнение заданий, исключить дополнительное время на выполнение контрольных или иных проверочных работ, заканчивать урок со звонком.

3. Регулярно давать учащимся задания на проверку знаний и восприятие смысла специальных математических понятий, терминов, вести конспекты с записями определений, формул, читать вслух и анализировать условия задач.

4. Уделять особое внимание формированию навыка табличного сложения и умножения, систематически предлагать задания на устный счет.

5. Регулярно прорабатывать все этапы алгоритма выполнения деления, дополнять устную работу заданиями на табличное умножение и деление, сложение и вычитание.

6. Предлагать анализировать ситуацию, о которой идёт речь в задаче, а далее пробовать работать с краткой записью, рисунком или схемой. Систематически уделять время на уроках для решения нестандартных задач, на логику, сообразительность, которые развивают функциональную грамотность.

7. Приучать школьников работать с заданиями, используя справочники и словари, поручать готовить сообщения, доклады, мини-проекты.

Укоренение изложенных рекомендаций в процесс обучения будет поддерживать качественные показатели при переходе учащихся в основную школу и в результате участники системы образования могут получить значительный рост уровня удовлетворённости школьной жизнью и успешной адаптации в пятых классах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толковый словарь Ушакова. URL: https://gufo. me/dict/ushakov/преемственность (дата обращения: 07.03.2023)
2. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. URL: https://fgos. ru/FGOS/standart_pdf.php?id=1009 (дата обращения: 07.03.2023)
3. Мендыгалиева А. К. Обеспечение преемственности в обучении математике учащихся начальной и основной школы // Вестник ОГУ. 2011. № 17/декабрь (дата обращения: 07.03.2023)
4. https://cyberleninka.ru/article/n/innovatsionnye-tehnologii-na-urokah-obespechenie-komfortnyh-usloviy-dlya-uchaschihsya-i-uchitelya (дата обращения: 07.03.2023)
5. https://videouroki. net/razrabotki/probliemy-v-priepodavanii-matiematiki-v-piatykh-klassakh. html (дата обращения: 07.03.2023)
6. https://s-vlad-school. ru/_data/files/metodicheskaya_biblioteka/reuckaja/06. pdf (дата обращения: 07.03.2023)

Н. В. Холкова
МКОУ СОШ № 5, г. Алзамай

ОСОБЕННОСТИ ПОДГОТОВКИ ВЫПУСКНИКОВ ШКОЛЫ К ГИА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ни для кого не секрет, что Государственная итоговая аттестация учеников показывает, обладает ли выпускник теми компетенциями, которые в будущем обеспечат его успешность. Современный учитель стремится качественно подготовить своих учеников к экзамену, применяет в своей работе наиболее эффективные методы, формы и технологии обучения. Хочу поделиться своими методами.

Начиная с шестого класса после изучения темы «Действия с обыкновенными дробями» раздаю демонстрационные варианты 9-го класса по математике учащимся. В задании 6 «Числа и вычисления» решаем примеры по прошедшей теме. Таким же образом обращаемся к вариантам на протяжении всего курса математики 6-го класса и курса алгебры и геометрии 7–8-х классов.

С учащимся 8-го класса осенью 2022 г. решили вести исследовательскую работу «Трудновыполнимые задания по алгебре и геометрии на ОГЭ».

Приведу пример его введения.

Обучаясь в восьмом классе, мы уже задумываемся об одном из самых важных моментов школьной жизни под названием ОГЭ. Экзамен действительно нелёгок, для каждого задания нужен особый подход. Общаясь с выпускниками прошлых лет и изучая условия сдачи ОГЭ по математике, мы поняли, что особое внимание надо обратить на задания по геометрии. Для получения положительной оценки необходимо выполнить как минимум два таких задания. Актуальность темы очень высока, связано это с приближением экзамена. С помощью наших исследований мы сможем помочь себе и своим одноклассникам в подготовке к ОГЭ по математике. Из этого вытекает цель моей работы.

Цель: выявить, какие задания ОГЭ по математике даются сложнее всего, и уделить им больше времени при подготовке к экзамену.

Гипотеза: Возможно ли определить наиболее сложные задания по математике ОГЭ?

Задачи:

- *изучить структуру и содержание контрольных измерительных материалов Основного государственного экзамена по математике;*
- *обработать протоколы проведения ОГЭ по математике в 2021–2023 гг.;*
- *провести опрос учащихся 10–11-х классов («Какие задания на ОГЭ по математике вызвали у вас наибольшее затруднение?»);*
- *обработать полученные данные и представить их в виде диаграмм;*
- *сравнить полученные результаты.*

Предмет исследования: задания по математике ОГЭ

Объект исследования: результаты выполнения заданий ОГЭ.

Мой ученик изучил кодификатор заданий на ФИПИ, обработал протоколы экзаменов по математике выпускников 2021, 2022 гг. и пробного экзамена 2023 г.по математике в 9-х классах нашей школы. Провел анкетирование среди учащихся 10–11-х классов и обработал результаты. Составил диаграммы и сделал выводы.

*«**Заключение.** Подводя итоги по результатам главы 2, делаем следующий вывод. Обратить внимание на задания по алгебре первой части под номерами (в порядке убывания сложности):*

14 – Задачи на прогрессии (арифметическая и геометрическая).

5 – Выбор оптимального варианта (квартиры; участки; путешествия и т. д.).

12 – Расчеты по формулам (вычисление по формуле; линейное уравнение).

4 – Прикладная геометрия: расстояния (квартиры; участки; путешествия и т. д.).

9 – Уравнения, системы уравнений (линейные уравнения; квадратные уравнения).

13 – Неравенства, системы неравенств (линейные неравенства; квадратные неравенства).

Обратить внимание на задания по алгебре второй части под номерами: 20, 21, 22.

Обратить внимание на задания по геометрии первой части под номерами:

16 – Окружность, круг и их элементы (центральные и вписанные углы; касательная, хорда, секущая, радиус).

17 – Площади фигур (квадрат; прямоугольник; параллелограмм).

Обратить внимание на задания по геометрии второй части под номерами: 23, 24, 25.

Таким образом, после всех исследований выявлены задания по алгебре и геометрии, которым нужно уделить больше времени для подготовки к экзамену по математике в 9-м классе мне и моим одноклассникам. Особое внимание нужно обратить на задания, которые совсем не выполнены, это № 22, 23, 24, 25. Считаю, что моя работа имеет практическую направленность для успешной сдачи экзамена по математике».

Для подготовки к зачетам по геометрии в 7–9-х классах применяю форму задания 19 «Анализ геометрических высказываний». Например, в 8-м классе зачет по теме «Подобные треугольники».

Зачет №3 «Подобные треугольники» учени______ 8 «а» кл I вариант

1. **Какие из следующих утверждений верны?**
   - Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.
   - Если две стороны и угол одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники подобны.
   - Если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
   - Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

2. **Какие из следующих утверждений верны?**
   - Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена , на отрезки, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.
   - Две медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 3 : 1, считая от вершины треугольника.
   - Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.
   - Два треугольника называют подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника равны соответственным сторонам другого треугольника.

3. **Какие из следующих утверждений верны?**
   - Любые два равнобедренных треугольника подобны.
   - Любые два прямоугольных треугольника подобны.
   - Два прямоугольных треугольника подобны, если среди углов одного из них есть угол равный 38^0, а среди углов другого – угол, равный 52^0?
   - Два равнобедренных треугольника подобны, если у них по равному тупому углу?

С 5-го класса используем создание интеллект-карт как подготовка к зачету. В 9-м классе индивидуальные карты, как справочный материал к экзамену. Составление интеллект-карт происходит поэтапно: движение идет от замысла к результату, а завершение карт, обсуждение итогов работы, возможность продемонстрировать его другим, дает ученику чувство осмысленности и оправданности усилий.

Н. В. Чепелева, Л. В. Шварева
МБОУ «СОШ № 10», г. Ангарск

МЕТОД КООРДИНАТ

В рамках реализации обновленных ФГОС одним из направлений является работа с одаренными школьниками.

Метод координат рассматривается в курсе 9-го класса практически ознакомительно, и ему чаще всего не уделяется достаточно внимания. Подробный разбор формул этого раздела происходит в основном в курсе старшей школы. Но метод координат имеет существенные преимущества в сравнении с традиционными методами решения задач: упрощает, иногда и сокращает решение задач, не предусматривает сложных построений, не требует чисто геометрических знаний: теорем, аксиом, свойств, признаков. То есть позволяет обходить те самые острые углы в решении, на которые натыкаются школьники. Таким образом, применение данного метода при решении задач имеет важное практическое значение при обучении школьников геометрии как в 9-м классе, так и в старшей школе.

Рассмотрим примеры решения задач на основании следующих формул:

– нахождение угла между прямыми на плоскости $\cos\alpha = \frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2}\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}}$,

$a_1x + b_1y + c = 0$ и $a_2x + b_2y + c = 0$ уравнения прямых;

– расстояние от точки до прямой $d = \frac{|a_1x_0 + b_1y_0+c|}{\sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2}}$, где $a_1x + b_1y + c = 0$ – уравнение прямой и $(x_0\,;\ y_0)$ – координаты точки.

Варианты решения геометрических задач:

Задача 1. Дан треугольник АВС, причем А(3; 5), В(-2; -7), С(-5; -1). Найдите а) косинус меньшего угла; б) площадь треугольника.

Решение: а) Найдем меньшую сторону АВ = $\sqrt{(3+2)^2+(5+7)^2} = 13$, АС $=\sqrt{(3+5)^2+(5+1)^2} = 10$ и ВС = $\sqrt{(-5+2)^2+(-1+7)^2}$=$3\sqrt{5}$. Значит, наименьшая сторона ВС. Составим уравнение прямой АВ, проходящей через точки А(3; 5), В(-2; -7)

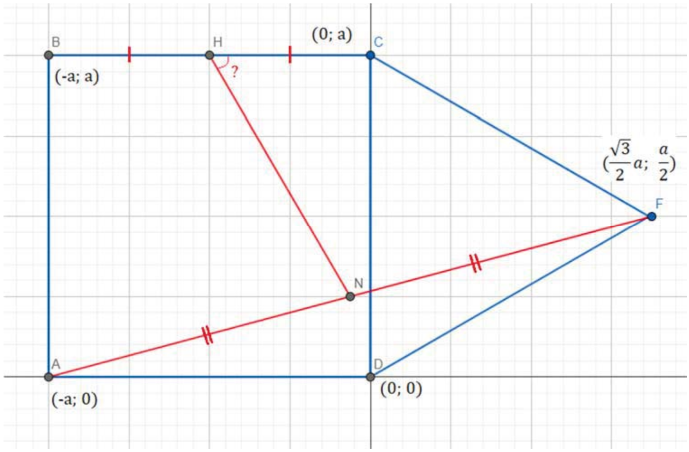
$\begin{cases} 5 = 3k + b \\ -7 = -2k + b \end{cases}$, $\begin{cases} k = \frac{12}{5} \\ b = -\frac{11}{5} \end{cases}$, получим $12x – 5y – 11 = 0$. Составим уравнение прямой АС, проходящей через точки А(3; 5), С(-5; -1)

$\begin{cases} 5 = 3k + b \\ -1 = -5k + b \end{cases}$, $\begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ b = \frac{11}{4} \end{cases}$, получим $3x – 4y + 11 = 0$. Тогда $\cos\alpha = \frac{|12\cdot3+5\cdot4|}{\sqrt{12^2+5^2}\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{56}{65}$

Составим уравнение прямой BC, проходящей через точки B(-2; -7), C(-5; -1) $\begin{cases} -7 = -2k + b \\ -1 = -5k + b \end{cases}$, $\begin{cases} k = -2 \\ b = -11 \end{cases}$, получим $2x + y + 11 = 0$.

Расстояние от т. A до прямой BC есть высота, тогда $d = \frac{|2\cdot 3+5+11|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{22\sqrt{5}}{5}$. Получим, $S = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{22\sqrt{5}}{5} = 33$.

Следующая задача из олимпиады по математике муниципального этапа 2022 г.



Задача 2. На стороне BC квадрата ABCD вовне построен равносторонний треугольник BSC. Отмечена точка H – середина стороны CD и точка N – середина AS. Найдите угол NHC.

Решение: Введем систему координат так что бы ось OX совпала с прямой AB, ось OУ с прямой CB и сторону квадрата обозначим за a. Координаты точек C(0; a), D($-a$; a), B (0; 0), A ($-a$; 0). Тогда H $(-\frac{a}{2};\ a)$, N $(\frac{\sqrt{3}-2}{4}a;\ \frac{1}{4})$. Составим уравнение прямых: а) проходящих через точки H $(-\frac{a}{2};\ a)$ и N $(\frac{\sqrt{3}-2}{4}a;\ \frac{1}{4})$.

$$\begin{cases} a = \frac{-a}{2}k + b \\ \frac{a}{4} = \frac{\sqrt{3}-2}{4}ak + b \end{cases}, \begin{cases} k = -\sqrt{3} \\ b = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}, x\sqrt{3} + y + a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0;$$

б) проходящих через точки H $(-\frac{a}{2};\ a)$ и C(0; a) $\begin{cases} a = b \\ a = -\frac{a}{2}k + b \end{cases}$, $\begin{cases} k = 0 \\ b = a \end{cases}$, $y - a = 0$.

Найдем угол между прямыми HN и CH $\cos\alpha = \frac{|0+1|}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{1}{2}$. Значит искомый угол равен 60°.

Перейдем к задачам по алгебре.

Задача 3. а) Найдите расстояние между прямыми $2x - y - 4 = 0$ и $2x - y + 5 = 0$; б) найдите значение параметра a, при котором расстояние между прямыми $2x - y - 4 = 0$ и $2x - y + a = 0$ равно $\frac{9\sqrt{5}}{5}$; в) найдите значение параметра a, при котором расстояние между прямыми $2x - y - 4 = 0$ и $2x - ay + 5 = 0$ равно $\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

Решение: а) Прямые по условию параллельны. Расстояние между параллельными прямыми равно расстоянию от произвольной точки одной прямой до второй. Возьмем прямую $2x - y - 4 = 0$ и выберем точку на данной прямой (0; –4). Тогда расстояние между прямыми вычисляется по формуле расстояния от точки до прямой $d = \frac{|0+4+5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$. б) Возьмем прямую $2x - y - 4 = 0$ и выберем точку на данной прямой (0; – 4). Расстояние между прямыми равно $d = \frac{|0+4+a|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$. Получим $|0 + 4 + a| = 9$, тогда $a = 5$ или $a = -13$. в) Возьмем прямую $2x - y - 4 = 0$ и выберем точку на данной прямой (0; – 4). Расстояние между прямыми равно $d = \frac{|0+4a+5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$. Получим $|0 + 4a + 5| = 9$, тогда $a = 1$ или $a = -\frac{13}{4}$.

Задача 4. Найти расстояние межу линиями $y = -x^2$ и $y = x + 1$.

Решение. Кратчайшее расстояние между графиками данных функций – расстояние между прямой $x - y + 1 = 0$ и касательной к графику функции $y = -x^2$, параллельной данной прямой. Найдем точку касания к $y = -x^2$ и прямой с угловым коэффициентом равным 1(условие параллельности). $y'(x_0) = 1, -2x = 1,$ $x = -0{,}5$,а $y = -0{,}25$,тогда точка касания $(-0{,}5; -0{,}25)$. Найдем расстояние от точки $(-0{,}5; -0{,}25)$ и прямой $x - y + 1 = 0$: $d = \frac{|-0{,}5+0{,}25+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Задача 5. Найдите площадь треугольника, образованного касательными, проведенными к графику функции $y = \sqrt{x}$ через точку М (2; 3/2), и секущей проходящей через точки касания.

Решение. Составим общий вид уравнения касательной для функции $y = \sqrt{x}$, в точке касания с абсциссой x_0: $y_{\text{кас}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \sqrt{x_0}$. По условию касательная проходит через точку М(2; 3/2), тогда $1{,}5 = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(2 - x_0) + \sqrt{x_0}$. Решив уравнение, получим $\sqrt{x_0}$=1 и $\sqrt{x_0}$= 2, тогда $x_0 = 1$ и $x_0 = 4$. Точки касания (1; 1) и (4; 2). Построим уравнение прямой проходящей через полученные точки: $y = kx + b$, $\begin{cases} 1 = k + b \\ 2 = 4k + b \end{cases}$, $k = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$. Уравнение прямой $x - 3y + 2 = 0$.

Найдем высоту данного треугольника через формулу расстояния от точки до прямой $d = \frac{|2-2,25+2|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{20}$. Вычислим длину сторону треугольника с концами в точках касания $a = \sqrt{(4-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$. Тогда площадь искомого треугольника $S = \frac{1}{2} a \cdot d, S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{20} \cdot \sqrt{10}$= 0,25.

А. А. Чупин
ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

ТЕОРЕМА ФУРЬЕ – БУДАНА ДЛЯ ОЦЕНКИ КОЛИЧЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

Основная теорема алгебры говорит о том, что у любого многочлена n-й степени с числовыми коэффициентами существует n комплексных корней. Доказательство этой теоремы не дает никаких методов для практического разыскания этих корней.

Поиски таких методов начались с попыток вывода формул, аналогичных формуле для решения квадратного уравнения. Эти попытки прекратились лишь после того, как Абель в 20-х гг. XIX в. доказал, что такие формулы для уравнений n-й степени при любом $x \geq 5$ заведомо не могут быть найдены. Наша работа посвящена изучению одного из методов, который позволяет оценить количество корней на заданном действительном промежутке. Мы рассматриваем возможности использования этого алгебраического раздела в организации исследовательских работ по математике школьников старших классов.

Теорема (Фурье – Будана). Пусть $N(x)$ – число перемен знака в последовательности $f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)$, где f – многочлен степени n. Тогда число корней многочлена f (с учётом их кратности), заключённых между a и b, где $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ и $a < b$, не превосходит $N(a) - N(b)$, причём число корней может отличаться от $N(a) - N(b)$ лишь на четное число.

Эта теорема, представленная в монографии В. В. Прасолова «Многочлены» [1], дает нам один из методов для поиска количества корней. Реализация метода требует применения несложных алгебраических операций. Однако, при всей простоте и удобстве, у метода Фурье – Будана есть недостаток. Получаемая с его помощью верхняя граница для количества действительных корней довольно высока.

Мы решили составить алгоритм, позволяющий оценить количество действительных корней многочлена (используя на теорему Фурье – Будана) и разработать реализующую этот алгоритм программу на языке программирования PascalABC. Далее мы с помощью нашей программы проводим исследование различных случаев применения метода Фурье – Будана. Для построения иллюстраций была использована программа Geogebra. Мы считаем, что эти задания можно предложить обучающимся 9–11-х классов при написании исследовательских проектов.

На основании теоремы Фурье – Будана можно сформулировать следующий *алгоритм*:

1. Ищем n производных от многочлена.
2. Поставляем a в получившуюся последовательность.

3. Находим количество смен знака в последовательности: $f(a), f^{'}(a),..., f^{(n)}(a)$.

4. Поставляем b в получившуюся последовательность.

5. Находим количество смен знака в последовательности: $f(b), f^{'}(b),..., f^{(n)}(b)$.

6. Ищем приблизительное количество действительных корней по формуле $N(a) - N(b)$.

7. Делаем вывод.

Рассмотрим пример реализации теоремы Фурье–Будана с помощью выведенного алгоритма для многочлена $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2$:

1.
$f^{'}(x) = 8x^3 - 9x^2 - 2x - 3$ $\quad f^{'''}(x) = 48x - 18$ $f^{''}(x) = 24x^2 - 18x - 2$
$f^{''''}(x) = 48$

2. Пусть $a = 0$, тогда:
$f(a) = 2$ $\quad f^{'}(a) = -3$ $\quad f^{''}(a) = -2$ $\quad f^{'''}(a) = -18$ $f^{''''}(a) = 48$

3. $N(a) = 2$

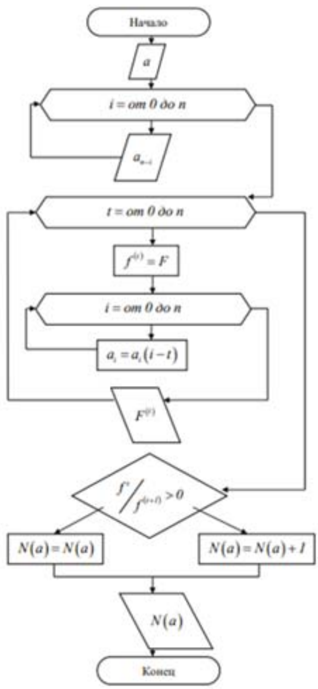
4. Пусть $b = 4$, тогда:
$f(b) = 294$ $\quad f^{'}(b) = 357$
$f^{''}(b) = 310$ $\quad f^{'''}(b) = 174$ $f^{''''}(b) = 48$

5. $N(b) = 0$

6. $N(a) - N(b) = 2$

7. Значит, количество действительных корней $2 - 2k,\ k \in N$ (2 или 0).

Программа на языке программирования PascalABC позволяет автоматизировать все вычисления. Данная программа работает по алгоритму, изображенному в схеме 1 (рассмотрен случай с начислением смены знака для a, для b она идентичная). При этом на языке программирования PascalABC невозможно задать многочлен и работать уже с ним, поэтому для программы вводятся коэффициент полинома, причём значения степеней существует в виде чисел, которые просто двигают счётчик. Для изменения старшей степени многочлена, например с 3 на 5, требуется заменить показатель числа n, в первой строке программы.



(схема 1)

Рассмотрим пример реализации программы для полинома $f(x)=2x^4-3x^3-x^2-3x+2$ (представлен краткий вариант вывода):

a = 0

a4 = 2.00	f0 = 2
a3 = -3.00	f1 = -3
a2 = -1.00	f2 = -2
a1 = -3.00	f3 = -18
a0 = 2.00	f4 = 48

Количество смен знака в последовательности = 2

b = 4

a4 = 2.00	f0 = 294
a3 = -3.00	f1 =357
a2 = -1.00	f2 = 310
a1 = -3.00	f3 = 174
a0 = 2.00	f4 = 48

Количество смен знака в последовательности равно 0

Количество действительных корней больше либо равно 0, но меньше либо равно 2, отлично на чётное число (0 либо 2).

Мы рассмотрели несколько полиномов при помощи теоремы Фурье – Будана и с помощью другого метода, который описывается теоремой Штурма, и получили следующую таблицу. Эта теорема представлена в монографии А. Г. Куроша «Курс высшей алгебры» [2]. Получение оценок на основании теоремы Штурма подробно описано в курсовой работе автора.

Таблица 1

Сравнение оценок, полученных с помощью двух теорем

Рассмотренный многочлен	Полученный результат по теореме	
	Фурье – Будана	Штурма
$f(x)=2x^4-3x^3-x^2-x+2$ (рис. 1)	$\le 2-2k$	2
$f(x)=x^5-x^4-8x^3+8x^2-9x+9$ (рис. 2)	$\le 5-2k$	3
$f(x)=x^5+2x^4+2x^3+22x^2-63x+36$ (рис. 3)	$\le 5-2k$	2

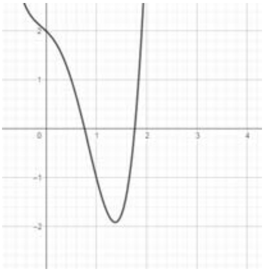


Рис. 1

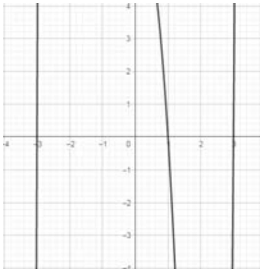


Рис. 2

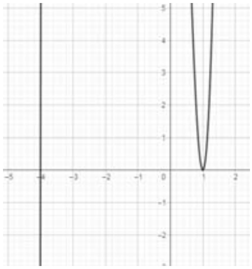


Рис. 3

Таким образом, в рамках исследовательской работы школьнику можно предложить изучить теорему Фурье – Будана и проиллюстрировать ее применение для многочленов различных степеней. В процессе решения этой задачи обучающийся отрабатывает ряд алгебраических навыков (применение базовых теорем, связанных с поиском действительных и комплексных корней многочлена и т. д.). Построение (возможно с использованием специальных приложений, таких как Geogebra) графиков многочленов будет способствовать формированию навыков чтения и анализа графиков функций. Программная реализация алгоритма свяжет это учебное математическое исследование с информатикой. Более серьезный вариант работы – рассмотреть сравнительное применение разных методов оценки числа действительных корней. В качестве примера мы привели сравнительную таблицу применения метода Фурье – Будана и метода Штурма. Было бы интересно поставить вопрос о выделении случаев, когда именно тот или иной метод дает более точный результат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М. : Наука, 1965. 431 с.
2. Прасолов В. В. Многочлены. М. : МЦНМО, 2001. 336 с.

Е. А. Штейнбек
МБОУ СОШ № 9 имени А. С. Пушкина, г. Иркутск

КОМПЛЕКСНЫЕ ЗАДАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УУД В ПРОЦЕССЕ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

На сегодняшний день перед учителем стоит масса различных целей обучения, главной из которых является создание мотивации путём самостоятельности действий обучающихся с помощью различных средств. Практико-ориентированный метод обучения, в котором за средство обучения выделяем комплексные задачи экономического характера, в свою очередь расширяющие диапазон экономического представления, имеет широкую значимость в современном процессе образования, т. е. будет являться помощником в реализации целей обучения. Нельзя оставить без внимания универсальные учебные действия, из которых более подробно остановимся на познавательных. В качестве средства их развития взято понятие «педагогической диагностики» тесно связанной с принципами практико-ориентированного обучения. Все данные позиции необходимы для решения проблемы отсутствия в широком доступе методики и дидактических материалов, направленных на требуемый уровень по ФГОС [2] сформированности познавательных УУД в процессе практико-ориентированного обучения.

Целью исследования становится разработка подхода к конструированию комплексных практико-ориентированных заданий экономического характера и методических рекомендаций по их использованию в рамках реализации идеи педагогической диагностики для развития познавательных УУД у обучающихся основной школы.

Опишем свой подход составленный на основе уже существующих методик педагогической диагностики [1] и характеристик практико-ориентированного метода обучения [3].

Характеристики педагогической диагностики *по составлению и применению диагностических материалов (заданий)*, для обоснования того факта, что разработанные нами задания действительно могут использоваться для формирования и развития познавательных УУД в процессе практико-ориентированного обучения на уроках математики в основной школе, а также служить средством диагностики их развития:

1. Выбрать познавательные УУД, которые диагностируются на степень сформированности.

2. Выделить тему или блок тем курса математики, на основе которых разработаются задания.

3. Определить будет ли диагностика направлена на общеучебное исследование знание предмета или его контроль, отсюда осуществить выбор организации диагностики:

– по масштабу: индивидуальная, групповая, в парах, массовая (2–3 класса, параллель), коллективная;

– по техническому оснащению: компьютерная, устная, раздаточный материал;

– по речевой коммуникации (деятельности): диалог, монолог, полилог, например, соответственно, дискуссия, письменная работа, дидактические игры.

4. Учесть уровень предметного знания, т. е. возрастные и индивидуальные особенности обучающихся: базовый, высокий, повышенный.

5. Разработать диагностический материал по выбранным ранее критериям, например, задания на: соответствия, единичный выбор, множественный выбор, ручной ввод, сравнение, решение задач, составление логической цепочки и т. п.

6. Проанализировать готовый диагностический материал на время необходимое для его выполнения, тем самым составив эталонную работу.

7. Разработать критерии оценивания: в чём будет измеряться каждое задание (баллы, проценты, «+» и «-» и т. п.), показ результатов (таблица, специальный бланк, расчётная формула и т. п.), интерпретация суммированных измерений.

8. Подготовить инструктаж по диагностической работе: название, цель, задачи, форма проведения, время, рассадка; ответы на возможные вопросы.

9. Проанализировать полученные данные, сделать выводы, подготовить для обучающихся описание результатов работы, далее провести планирование и проведение дополнительных занятий и следующих диагностических работ для выделения динамики улучшения или ухудшения сформированности диагностируемых познавательных УУД у обучающихся.

Алгоритм разработки комплексных заданий экономического характера как практико-ориентированных задач:

1. Определить цель задачи экономического характера, её значимость в изучаемой теме и в жизни обучающегося.

2. Определить уровень сложности задачи путём формулировки условия и требования экономической задачи, а именно:

– выбрать количество переменных (объектов задачи);

– составить систему ограничений (свойства объектов), из которой будет строиться математическая модель задачи.

3. Выбрать форму предоставления информации (текстовая, график, диаграмма, таблица, схема, чертёж, рисунок, краткая запись и т. д.).

4. Сформулировать задачу экономического характера.

5. Определить экономико-математический метод решения задачи и уровень самостоятельности обучающихся в получении и обработке информации.

6. Определить форму ответа на требование задачи (однозначный, многовариантный, ответ в виде графика, рисунка, таблицы).

Обозначим *уровни сложности задач*:

1. Базовый – два объекта и одно требование;

2. Повышенный – два объекта и два требования;

3. Высокий – три и более объекта, два и более требования.

Приведём пример (согласно выведенному алгоритму) комплексного задания экономического характера как практико-ориентированной задачи повышенного уровня сложности для обучающихся 5–6-х классов:

Цель задачи: показать, что наличие в магазине распродажи и (или) бонусов не всегда является выгодным предложением для покупателя.

Значимость задачи в изучаемой теме и в жизни обучающегося:

1. Повторяется понятие «процент»;

2. Отрабатывается математическое действие «нахождение процента от числа»;

3. Пример того, как распродажи и дополнительные бонусы, которые даёт магазин, на самом деле просто маркетинговый ход, ведь с точки зрения психологии, когда человек видит слова акция, распродажа, бонусы и тому подобное, то ему «автоматически» кажется, что, применяя один из видов «удачи», товар покупается на некоторое количество рублей дешевле и уже не проверяет другие варианты по совершению покупки.

Уровень сложности: повышенный.

I. Условие:

Объекты: покупка вещей до дня рождения, покупка вещей в день рождения.

Свойства объектов:

***1. Характеристики*:**

***а) известные*:**

1) Изначальная цена на чёрное платье – *1200* руб.;

2) Изначальная цена на белую блузу – *800* руб.;

3) Бонусы до дня рождения – *350*;

4) Бонусы в день рождения – *500*.

***б) неизвестные*:**

1) Цена по распродаже на чёрное платье;

2) Цена по распродаже на белую блузу;

3) Стоимость покупки до дня рождения с бонусами;

4) Стоимость покупки до дня рождения без бонусов;

5) Стоимость покупки в день рождения со всеми бонусами;

6) Стоимость покупки в день рождения без изначальных бонусов.

***2. Отношения*:**

1) *75 %* от *1200* руб.;

2) На *20 %* дешевле, чем *800* руб.;

3) (стоимость товаров по распродаже) – (*30 %* от имеющихся бонусов);

4) (изначальная стоимость на товары) – (*30 %* от имеющихся бонусов) и (или) (*60 %* от бонусов, данных на день рождения)

II. Требование: найти

а) цену каждого выбранного товара школьницей Олей по распродаже в магазине «*O'stin*»;

б) все варианты, при которых покупка может быть совершена Олей, тем самым, выясните какой из вариантов выгоднее.

Форма предоставления информации: текстовая, краткая запись, схема, таблица.

Экономико-математический метод решения задачи: задача решается с помощью элементарной арифметики и логики.

Уровень самостоятельности обучающихся в получении и обработке информации: высокий, так как:

– анализируются различные виды условия: текст, краткая запись, таблица и схема, делаются по ним определённые выводы, на которых будет основываться решение задачи;

– решают задачу с помощью знания понятия «процент» и математического действия «нахождение процента от числа», до которого доходят сами после изучения условий задачи, составляются выражения.

Форма ответа на требование задачи: многозначный.

Формулировка задачи:

Магазин одежды O'STIN в конце весны запустил распродажу базовых вещей. Ученица 10-го класса Оля выбрала себе классическое чёрное платье и белую блузу.

Изменение цены на выбранные товары:

	Чёрное платье	*Белая блуза*
Изначальная цена на товар	*1200* руб.	*800* руб.
Цена на товар по распродаже	*75%* от	на *20%* дешевле, чем

Но перед ней встал выбор:

– купить выбранные вещи сейчас с применением имеющихся бонусов;

– купить товары через 4 дня в свой день рождения, так как в честь праздника на бонусную карту магазин отправит дополнительные бонусы, притом, что и в этом случае есть выбор по использованию бонусов.

БОНУСЫ = РУБЛИ	
Было бонусов до дня рождения	***Даются в честь дня рождения***
350	*500*

Схемы применения бонусов на товары по распродаже:

I – в любой обычный день:

$$\left(\textit{стоимость товаров по распродаже}\right) - \left(\textit{30\% от имеющихся бонусов}\right);$$

II – в день рождения:

$$\left(\textit{изначальная стоимость на товары}\right) - \begin{cases} \textit{30\% от изначальных бонусов} \\ \qquad \textit{и (или)} \\ \textit{60\% от бонусов, данных на день} \\ \textit{рождения} \end{cases}$$

Если в день рождения не применять ни изначальные бонусы, ни дополнительные, то товар покупается по цене распродажи.

Изучив все данные, вычислите:

а) цену каждого выбранного товара школьницей Олей по распродаже в магазине O'STIN;

б) все варианты, при которых покупка может быть совершена Олей, тем самым, выясните какой из вариантов выгоднее.

Решение:

а) Цена чёрного платья по распродаже: 75% от 1200 руб.

$1200 \cdot 0{,}75 = 900$ *(руб.);*

Цена белой блузы по распродаже: на 20% дешевле, чем 800 руб.

$800 \cdot 0{,}8 = 640$ *(руб.);*

б) Разберём все варианты, при которых Оля может совершить покупку:

$(900 + 640) - 350 \cdot 0{,}3 = 1540 - 105 = 1435$ *(руб.);*

Схема II – в день рождения: (использование изначальных бонусов и новых)

$(1200 + 800) - (350 \cdot 0{,}3 + 500 \cdot 0{,}6) = 2000 - (105 + 300) = 1595$ *(руб.).;*

В любой обычный день, без использования изначальных бонусов:

(в день рождения без применения каких-либо бонусов)

$900 + 640 = 1540$ *(руб.);*

В день рождения без использования изначальных бонусов:

$(1200 + 800) - 500 \cdot 0{,}6 = 2000 - 300 = 1700$ *(руб.);*

В день рождения без использования дополнительных бонусов:

$(1200 + 800) - 350 \cdot 0{,}3 = 2000 - 105 = 1895$ *(руб.).*

Ответ:

а) *900* руб. цена по распродаже на чёрное платье, а на белую блузу *640* руб.

б) выгоднее совершить покупку в любой обычный день, т. е. до дня рождения, с использованием изначальных бонусов.

Опираясь на характеристики педагогической диагностики, описанные выше, также в данном примере стоит отметить:

1. Развивающиеся познавательные УУД в ходе решения экономической задачи:

Общеучебные универсальные действия:

– быстрый поиск и верное выделение необходимой информации в процессе смыслового чтения данной задачи;

– корректный выбор способа решения и его логическое письменное построение (оформление) в зависимости от конкретных условий;

– самостоятельный анализ проделанной работы (рефлексия, контроль, оценка результатов);

Знаково-символические действия:

– грамотное применение необходимых математических моделей в процессе решения заданий (применение действия «нахождение процента от числа», правил сложения, вычитания, умножения и деления чисел и так далее);

Логические универсальные действия:

– сравнение объектов по математико-логическим правилам;

– установление причинно-следственных связей между объектами задачи для рассмотрения выгодных путей решения по требованию задачи и выведение следствий;

– построение логической цепи рассуждений;

Действия постановки и решения проблемы:

- самостоятельный поиск способа решения и проблемы экономической задачи.

2. Задача может быть дана в рамках темы 6-го класса «Нахождение процента от числа» на уроках её отработки, в более старших классах как повторение понятия «Процент» на подготовительном этапе урока;

3. Время выполнения: 20 минут (старшие классы 10 минут).

4. Критерии оценивания экономической задачи:

Критерий оценивания	**Баллы**
Грамотное оформление решения	0 баллов – отсутствует какое-либо оформление; 1 балл – частичное оформление (отсутствует краткая запись); 2 балла – полностью соблюдён порядок оформления задачи: краткая запись, решение, ответ.
Логическая последовательность рассуждений решения	0 баллов – решение отсутствует; 1 балл – задана только схема решения, без необходимых расчётов; 2 балла – проведены все необходимые математические преобразования и расчёты, но с вычислительными ошибками; 3 балла – задача решена верно.
Выполнение требований задачи	0 баллов – в ходе решения не пришли ни к одному из требований задачи; 1 балл – произведены все необходимые рассуждения и вычисления по 1 требованию задачи; 2 балла – выполнены математические расчёты ко 2 требованию задачи, но не сделаны соответствующие выводы; 3 балла – требования задачи найдены верно.

Шкала оценивания – max 8 Оценка «2» – менее 4 баллов; Оценка «3» – 4 балла; Оценка «4» – 5–6 баллов; Оценка «5» – 7–8 баллов.

Методические рекомендации по разработке практико-ориентированных задач экономического характера:

1. В определении уровня сложности задачи можно использовать таблицу (см. ниже), в неё включены все необходимые элементы задачи для дальнейшего составления её математической модели, также рекомендуем данную таблицу для заполнения обучающимися 5-ых классов перед решением сюжетной задачи, это действие будет называться *анализом задачи*, что поможет ученику разобраться в условии и требовании решаемой задачи.

I. Условие: **Объекты:** **Свойства объектов:** ***1. Характеристики*:** ***а) известные*:** ***б) неизвестные*:** ***2. Отношения*:** **II. Требование: найти**

2. Форма предоставления информации, как и форма ответа на требование задачи не должны быть в комплексных заданиях экономического характера одинаковыми и повторяющимися, в задачах должна сохраняться индивидуальность, что будет способствовать интересу обучающихся к каждой отдельной задаче.

3. В одной задаче можно и нужно совмещать несколько экономико-математических методов решения задач экономического характера, так как это сделает задачу разносторонней.

4. При составлении формулировки задачи необходимо обращать внимание на её правдоподобность, например, если задача на «банки, вклады и кредит», то необходимо изучить и проанализировать финансовый рынок (выбрать несколько популярных банков и посмотреть условия по кредитам или вкладам), если задача на рыночные отношения: стоимость товаров, то узнать реальные цены на рассматриваемые товары; и тому подобное.

Подводя итоги нашей работы, отметим, что применять полученные разработки учитель математики может в урочной и во внеурочной деятельности обучающихся, например, на факультативе, математическом кружке, курсе для подготовки к ЕГЭ, школьной олимпиаде и тому подобное. Комплексные задания экономического характера, разработанные по составленному алгоритму как практико-ориентированные задачи с учётом выделенных характеристик педагогической диагностики использующиеся как средство диагностики развитости познавательных УУД, вызовут у обучающихся интерес и мотивацию к изучению экономики и тем, в рамках которых будут даваться задачи, а для учителя это возможность внести особый вклад в экономико-математическое образование детей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максимов В. Г. Педагогическая диагностика в школе : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. М. : Академия, 2002. 272 с.

2. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. URL: https://fgos. ru/ (дата обращения: 03.03.2023)

3. Использование практико-ориентированного подхода в обучении математике : методические рекомендации / сост. Т. В. Шаховал. Южно-Сахалинск : Изд-во ИРОСО, 2020. 24 с.

Н. А. Юрчишина
МОУ Лицей г. Черемхово

РАЗВИТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ КАК УСЛОВИЕ РЕАЛИЗАЦИИ ТРЕБОВАНИЙ ФГОС

Математике должно учить в школе еще с той целью, чтобы познания, здесь приобретаемые, были достаточными для обыкновенных потребностей жизни.
И. Л. Лобачевский

В сентябре 2022 г. вступили в силу обновленные ФГОС для основной школы, в которых особое внимание уделяется формированию функциональной грамотности как одному из условий овладения ключевыми компетенциями.

Как понять, почему один ребенок учится с удовольствием, а другой равнодушен к учебе? Ответ прост. Причина данной проблемы кроется в отсутствии у некоторых учащихся интереса к приобретению новых знаний из-за отсутствия личностного смысла учения. Для современного школьника очень важно не только усваивать учебный материал, но и уметь использовать полученные навыки и знания в решении жизненных проблем. Сегодня мало просто знать определения и правила, нужно еще уметь их использовать в повседневной жизни, понимать, когда и как можно ими воспользоваться.

Анализ результатов ОГЭ по математике позволяет сделать вывод, что практико-ориентированным заданиям в школьном курсе математики уделяется мало внимания, и потому их решение вызывает трудности у выпускников.

Работать над функциональной грамотностью учеников, чтобы знания, которые они получат на занятиях, использовались для решения практических повседневных задач, следует начиная с младших классов до окончания основной школы.

Для успешного формирования функциональной грамотности в учебном процессе каждый учитель должен понимать:

– что такое функциональная грамотность, в чем заключаются ее отдельные составляющие;

– как определить, на каком уровне она сформирована у ученика и какой инструментарий оценивания можно использовать;

– как направить учебный процесс на эффективное овладение функциональной грамотностью.

При организации работы по формированию математической грамотности на уроке я предлагают учащимся решить не типичные учебные задачи, а задания, приближенные к реальным проблемным ситуациям, в решении которых используются доступные им средства математики, а также способность формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах [1].

На уроках я систематически предлагаю своим ученикам решать задания, у которых, в отличии от обычных математических задач, изменена структура. В формулировке цели отсутствуют слова «реши задачу», нет привычной формулировки вопроса, который начинается со слов «сколько», «во сколько раз» и т. д., есть характеристики заданий и система оценивания (например, задания 1 уровня сложности оцениваются от 0 до 1 балла), что способствует развитию регулятивных учебных действий, таких как планирование и упорядочивание хода их решения. Первоначально данная нестандартная формулировка вызывает у учащихся затруднения, так как переходить от математической проблемы к реальному миру, получается не всегда. Преодолению данных затруднений способствует систематический разбор подобных заданий, а также подбор задач, учитывающих как возрастные особенности школьников, так и уровень их предметных знаний. Нельзя учащимся 5-го класса предложить решение даже самых интересных просто звучащих контекстов, если при их решении потребуется математическое содержание 11-го класса.

Среди всем известных разновидностей функциональной грамотности – читательская грамотность занимает особое место. Именно она становится ключом к другим видам функциональной грамотности. Невозможно решить математическую задачу, не прочитав условие, не разобравшись, о чем нас спрашивают. Любая задача по другим школьным предметам начинается с текста, пусть и специфического, но требующего применения обычных правил.

Например, если задания по математической грамотности включают в себя ситуативные моменты, с которыми учащиеся не встречаются в повседневной жизни. Интерпретировать условие такой задачи из реального в математический мир довольно сложно. При разборе условия задания часть времени будет потрачена на формирование читательской грамотности ребят.

Большую роль в развитии функциональной грамотности также играет форма проведения занятий. С большим интересом и энтузиазмом ребята работают над материалом во время проведения деловых игр, квест-игры, мозговых штурмов, экономических поединков и т. д.

Например, командам на одном из этапов экономического поединка было предложено оценить экономический эффект обмена валюты.

«Самара из Бишкека готовиться к поездке в США на 3 месяца на стажировку. Ей нужно было поменять несколько тысяч сомов на американские доллары ($)

Вопрос 1

Самара узнала, что курс обмена между американским долларом и кыргызским сомом был следующий: 1$ = 84,95 сом. Самаре нужно к поездке приготовить 1250 американские доллары по этому курсу. Хватит ли Самаре приготовить для обмена 105 000 кыргызских сомов?

Вопрос 2

По истечению времени стажировки Самара приехала домой и обнаружила, что у нее осталось 340 американских долларов. Она поменяла их, но уже по новому курсу: 1$- 81,4 сом. Какую сумму она получила по новому курсу?

Вопрос 3

Во время 3 месяцев курс обмена валют изменился от 84,95 сомов до 81,4 сома за 1$. Можно ли сказать, что новый курс был выгодным для Самары? Объясни ответ. «

Необычная формулировка заданий на уроке могла бы вызвать у ребят трудности. Но обновленная обстановка и дух соперничества с одноклассниками, при которой они решали задачи, способствовали более гибкому подходу к поиску ответов.

В своей педагогической практике я использую цифровые ресурсы сети Интернет. Нередко я предлагаю учащимся выполнить задания в разделе «Функциональная грамотность» на платформе Российской электронной школы, что способствует самоподготовке ребят, развитию их информационной грамотности, повышению уровня готовности будущих выпускников к решению практико-ориентированных задач на ОГЭ.

Развитие функциональной грамотности учащихся позволяет повысить качество математического образования школьников, а значит и удовлетворение от педагогической деятельности.

ОБ АВТОРАХ

Абрамов Егор Сергеевич – магистрант 2-го курса направления 44.04.01 «Педагогическое образование» (магистерская программа «Математическое образование») Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск; учитель математики МБОУ Лицей № 2, г. Иркутск

Агейчик Виталий Новомирович – учитель математики МАОУ Лицей ИГУ, г. Иркутск

Аникеева Ирина Николаевна – учитель математики МБОУ СОШ № 66, г. Иркутск.

Артемьева Светлана Вадимовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике Педагогичесского института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск

Бычкова Ольга Ивановна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск; учитель МБОУ «Лицей-интернат № 1», г. Иркутск.

Василевская Алла Олеговна – учитель математики МОУ Школа № 3, г. Черемхово.

Выборова Елена Станиславовна – учитель математики и информатики МБОУ СОШ № 39, г. Иркутск.

Гималеева Александра Анатольевна – учитель математики МКОУ « СОШ № 85», г. Тайшет.

Гусляков Никита Владимирович – студент 4-го курса направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика – Дополнительное образование» Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Дёмина Оксана Олеговна – учитель математики, заместитель директора МБОУ СОШ № 42, г. Иркутск.

Дулатова Зайнеп Асаналиевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МиМОМ ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Ермакова Ольга Владимировна – учитель математики МБОУ СОШ «Новая Эра», г. Тулун.

Зенцов Андрей Григорьевич – учитель математики Лицей № 36 ОАО «РЖД», г. Иркутск.

Зыкова Елена Эдмундовна – старший преподаватель кафедры ТВиДМ ИМИТ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Иванов Илья Алексеевич – студент 4-го курса направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика – Дополнительное образование» Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Кальянова Наталья Михайловна – учитель математики МКОУ «СОШ № 85», г. Тайшет.

Карпина Юлия Васильевна – учитель математики МБОУ «СОШ № 75», г. Иркутск.

Коваленко Елена Станиславовна – старший преподаватель кафедры математики и методики обучения математике Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Ковыршина Анна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Королева Светлана Васильевна – преподаватель математики ГАПОУ ИО «Иркутский технологический колледж», г. Иркутск.

Кузуб Наталья Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Курдамосова Екатерина Сергеевна – учитель математики МБОУ ШР «Шелеховский лицей», г. Шелехов.

Курьякова Татьяна Сергеевна – старший преподаватель кафедры МиМОМ ПИ ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Лапшина Елена Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Матчишина Мария Николаевна – учитель информатики и основ финансовой грамотности МБОУ «СОШ № 5», г. Усолье-Сибирское.

Петрова Татьяна Александровна – учитель математики МБОУ СОШ «Новая Эра», г. Тулун.

Полякова Марина Николаевна – учитель математики МБОУ города Иркутска «Средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов № 14», г. Иркутск.

Пономарева Мария Валерьевна – студентка 4-го курса направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика – Дополнительное образование» Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Присакарь Светлана Владимировна – учитель математики МКОУ «СОШ № 3 г. Бодайбо», г. Бодайбо.

Просандеева Ирина Александровна – учитель математики МОУ Лицей, г. Черемхово.

Самойленко Анна Андреевна – учитель математики МОУ Гимназия им. В. А. Надькина , г. Саянск.

Свинкина Яна Алексеевна – студентка 5-го курса направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика – Дополнительное образование» Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Субботина Елизавета Юрьевна – студентка 5-го курса направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика-Дополнительное образование» Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Холкова Наталья Владимировна – учитель математики МКОУ СОШ № 5, г. Алзамай.

Чепелева Наталья Викторовна – учитель математики МБОУ «СОШ № 10», г. Ангарск.

Черкай Анастасия Алексеевна – студентка 5-го курса направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика – Дополнительное образование» Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Чупин Алексей Александрович – студент 4-го курса направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика – Дополнительное образование» Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Шварева Людмила Викторовна – учитель математики, заместитель директора МБОУ «СОШ № 10», г. Ангарск.

Штейнбек Евгения Анатольевна – магистрант 2-го курса направления 44.04.01 «Педагогическое образование», магистерская программа «Математическое образование» Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск; учитель математики МБОУ г. Иркутска СОШ № 9 имени А. С. Пушкина.

Штыков Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры социально-экономических дисциплин Педагогического института, ФГБОУ ВО «ИГУ», г. Иркутск.

Юрчишина Наталья Александровна – учитель математики МОУ Лицей, г. Черемхово.

Научное издание

МАТЕМАТИКА И ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕМ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы
XVI Всероссийской научно-практической конференции
Иркутск, 28–29 марта 2023 г.

Материалы публикуются в авторской редакции.
Ответственность за достоверность и корректность изложения несут авторы статей

Подготовили к печати:
Е. С. Коваленко, Н. М. Кузуб

Темплан 2023. Поз. 33
Уч.-изд. л. 6,4

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124